Till studenten

De studenter som började sina skogliga studier år 2002 har ansett att de skulle behövt en repetitionskurs i matematik. Nu är det givetvis så att långtifrån alla kurser på ”Skogis” kräver matematiska kunskaper eller färdigheter, men några gör det (under första tiden kan det t.ex. röra sig om någon ekonomikurs). Föreliggande arbete har därför tillkommit för att förhoppningsvis förenkla för Dig att återuppliva eventuellt bortglömda mattekunskaper. Någon speciell schemalagd repetitionskurs finns det inte tid för.

Arbetet innehåller både text och övningar. Tanken är att Du ger dig på övningarna och endast läser texten om Du fastnar. Du hittar övningarna insprängda i texten som **ÖVN**. Vissa övningar har förf. bedömt som litet knepigare eller mer arbetsamma än andra och de har markerats med ett *****. Det förekommer nog något av typen ”överkurs” och de har fått en ******-markering. Innehållet har anpassats till vad förf. tror är viktigast för vissa kurser under Dina studier vid SLU.

Du får ta del av arbetet så här redan under sommaren före studierna, och så att Du skulle få chansen att gripa Dig an med det i god tid.

Du torde tillhöra undantagen om Du direkt klarar av alla eller större delen av alla övningarna utan bekymmer. Flertalet studenter kommer att fastna åtskilliga gånger. Skulle Du få problem är Du alltså inte ensam om det.

Det är möjligt att allt inte är så tydligt och välskrivet som man kunde önska. Förf. har försökt hålla en mer ledig ton än vad som är vanligt i matematisk text. Tanken har aldrig varit att skriva en fullständig lärobok utan mer en ”repetitionsstencil”. Tanken har dock varit att stencilen skulle kunna användas som ett minikompendium även senare under studietiden. Behöver Du ytterligare detaljer har Du förmodligen någon genomtummad gymnasiebok någonstans.

Umeå 1 juli 2003

Sören Holm (universitetslektor)

Innehåll

1. De fyra räknesätten
De fyra räknesätten (operationerna) addition, subtraktion, multiplikation och division ska väl egentligen inte vålla problem. Men tänk på att

a) Vi inte kan dividera med 0, men däremot multiplicera med det. Och $0 \cdot x = 0$ för alla tal x.
b) Man har kommit överens om i vilken ordning operationerna ska utföras vid blandade uttryck: Först multiplikation/division och sedan addition/subtraktion. Alltså blir $4 \cdot 3 + 2 = 12 + 2 = 14$ och inte $4 \cdot 5 = 20$.

Flera multiplikationer i rad skapar inte oreda, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$ eller $2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 15 = 30$ eller $2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$ eller … Det spelar ingen roll i vilken ordning multiplikationerna utförs. Inte heller $24 \cdot 4 / 2 = 48$ strular. Men däremot $24 / 4 \cdot 2$ (blir det sista 12 eller 3?)

Annorlunda blir det med flera divisioner. Tag uttrycket $24 / 4 / 2$. Hur stort blir det värdet? Räknar vi först $24 / 4 = 6$ och därefter $6 / 2 = 3$ eller först $4 / 2 = 2$ och sedan $24 / 2 = 12$? Vilket av svaren 3 och 12 är det korrekta? Sanningen är att det kan vi inte veta, den som skrev $24 / 4 / 2$ har inte fattat att han/hon måste sätta ut parenteser för att tala om ordningen. Så det kan vara dags att gå till parentesräkning, men först några övningsexempel.

ÖVN.1. Beräkna värdet av a) $4 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ b) $4 \cdot 3 - 2 \cdot 5$ c) $4 + 3 \cdot 2 - 5$ d) $12 / 4 - 3$ e) $2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7$ f) $0.3 + 2.1 + 3.5 - 4.2$ (Not: Decimal*punkt* används genomgående) g) $0.3 \cdot 0.7 - 2 \cdot 0.1$ h) $5 / 0.2 + 6 / 0.3 - 6 \cdot 7$

ÖVN. 2. För vilket eller vilka värden på y och x måste vi ”se upp” med uttrycket y / x?

2. Parenteser
Parenteser används för att bryta ordningen mellan räknesätten eller för att ange en annars obestämd ordning. Antag att vi ska ha 20 procents rabatt i en affär och köper 5 enheter av vara A till ett pris på 10 kr per enhet och 3 enheter av vara B till ett styckepris på 20 kr. Hur mycket ska vi betala? Utan rabatt blir uttrycket $5 \cdot 10 + 3 \cdot 20$, och värdet av detta blir 110 kr. Nu ska vi ha 20 procents rabatt, vilket är 22 kr, och kvar att betala blir $110 - 22 = 88$ kr. Vi räknar uppenbarligen ut de 110 först innan vi beräknar rabatten, så det går *inte* att skriva rabatten som $0.20 \cdot 5 \cdot 10 + 3 \cdot 20 = 70$. Vi sätter in en parentes för att tala om att vi först beräknar $5 \cdot 10 + 3 \cdot 20$ och sedan 20% på det, $0.20 \cdot (5 \cdot 10 + 3 \cdot 20) = 22$. Hela uttrycket blir $110 - 0.20 \cdot (5 \cdot 10 + 3 \cdot 20) = 88$.

Uttrycket $24 / 4 / 2$ ovan kan nu korrigeras. Antingen menas $(24 / 4) / 2 = 6 / 2 = 3$ eller $24 /(4 / 2) = 24 / 2 = 12$. Här var det inte fråga om att bryta den vanliga ordningen utan att tala om vilken ordning som gällde.

Flera parenteser kan användas i samma uttryck och vi kan använda parenteser inom parenteser (inom ytterligare parenteser etc). Till exempel kan vi skriva betalningen ovan som $(1 - 0.20) \cdot (5 \cdot 10 + 3 \cdot 20) = 88$. Vi ska ju betala $100 - 20 = 80$ procent av det nominella beloppet, och vi räknar först ut *den* siffran (80/100) och det nominella beloppet först, och därefter multiplicerar vi.

Några exempel.

Ex. 1. $(3+2\cdot 2)\cdot(2\cdot 7-5)/3=(3+4)\cdot(14-5)/3=7\cdot 9/3=63/3=21$
Två parenteser finns som behandlads först (separat). Den första är $3+2\cdot 2=3+4=7$, för multiplikation ”går först”. Den andra är $2\cdot 7-5=14-5=9$, återigen för att multiplikation går först. När vi är klara med parenteserna räknar vi i ordning som vanligt.

Ex. 2. $\big(3\cdot 4.2-2\cdot(0.4\cdot 5.2-3.6)\big)$
Här har vi ”parentes inom parentes”, vilket markerats med litet olika storlekar (man kan också använda andra varianter som $[(\quad)]$ eller $\{(\quad)\}$). Vi börjar då med den *inre* parentesen, och får $0.4\cdot 5.2-3.6=2.08-3.6=-1.52$. Vi är då ”framme” vid $\big(3\cdot 4.2-2\cdot(-1.52)\big)$, där den inre parentesen behållts eftersom värdet blev negativt. Vi går vidare, $\big(3\cdot 4.2-2\cdot(-1.52)\big)=12.6-(-3.04)=15.64$, där vi ”tar” multiplikationerna först och subtraktionen sist, allt enligt den vanliga ordningen. Att subtrahera ett negativt tal är detsamma som att addera motsvarande positiva tal (”minus gånger minus blir plus”).

Ex. 3. $6\cdot[8-3\cdot(12-2\cdot 5)]/[2\cdot(6-0.2\cdot 15)+4]+2$
Vi har två inre parenteser, som vi tar först, därefter två yttre. Beräkningsgången blir
$$6\cdot[8-3\cdot(12-2\cdot 5)]/[2\cdot(6-0.2\cdot 15)+4]+2=6\cdot[8-3\cdot 2]/[2\cdot 3+4]+2=$$
$$=6\cdot 2/10+2=12/10+2=1.2+2=3.2$$

Några övningar:
ÖVN. 1. Beräkna a) $2.1\cdot(7-3.3\cdot 2)$ b) $(135-28\cdot 4)\cdot(3\cdot 5-2\cdot 7)$
c) $(4\cdot 6.2-4.6\cdot 2)/(9\cdot 3-23)$ d) $5.4-2.1\cdot[13.5+8\cdot(2.2\cdot 3-4.3\cdot 2)]$
e) $2-3\cdot[4+5\cdot\{26-4\cdot(3\cdot 2+1)\}]$ f) $(3\cdot 4-7)\cdot(17-4\cdot 2)\cdot(-13+5\cdot 3)$

ÖVN. 2. Uttrycket $2\cdot 5+3\cdot 7-4\cdot 6$ saknar parenteser och dess värde är 7.
Sätt nu själv in parenteser på litet olika sätt och beräkna de värden som blir resultatet. Behåll tecknen. Det går även att få till dubbla parenteser och parentes inom parentes.

Egentligen är det här inte så svårt (men kanske inte heller lustfyllt). Får man ett uttryck (fullt) med parenteser är det bara att hålla tungan rätt i mun och köra på. I verkliga livet är det kanske litet värre eftersom *man själv ska sätta ut parenteserna*. Själva räknandet kan man ju idag överlåta åt minräknare eller datorer och de följer slaviskt dina instruktioner (även om de inte är korrekta).

Not. Bråkstreck kan fungera som parenteser. Så är t.ex. $\dfrac{5+3\cdot 7}{13}=\dfrac{26}{13}=2$ och $\dfrac{5+3\cdot 7}{13}\cdot\dfrac{11-3\cdot 2}{10}=\dfrac{26}{13}\cdot\dfrac{5}{10}=\dfrac{130}{130}=1$, men för säkerhets skull bör man skriva det andra uttrycket $\dfrac{(5+3\cdot 7)}{13}\cdot\dfrac{(11-3\cdot 2)}{10}$ i stället. (För mycket parenteser innebär i regel ingen fara)

3. Räkning med rationella tal
Ett rationellt tal är ett tal på formen p/q där p och q är heltal, t.ex $2/3$ och $127/229$.

Vill man addera eller subtrahera två rationella tal (utan att approximera genom decimaltal) gör man *liknämnigt*. Exempel: $2/3$ och $3/4$ skall adderas. Vi hör på orden ”tredjedel” och ”fjärdedel” att talen inte har samma ”enhet”. Men vi kan göra om dem till samma enhet ”tolftedelar” ($3\cdot 4=12$, produkten av nämnarna) på följande sätt

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}\left(=1\frac{5}{12}\right)$, där multiplikationerna med $\frac{4}{4}$ respektive $\frac{3}{3}$ ju inte förändrar värdena (båda är ju lika med 1).

Den gemensamma nämnaren 12 fick vi här genom att multiplicera nämnarna med varandra. Vi kan göra likadant i fallet $\frac{7}{8}+\frac{5}{12}+\frac{4}{9}$. Vi kan använda den gemensamma nämnaren $8\cdot 12\cdot 9=864$, och beräkningen blir då

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{108}{108}+\frac{5}{12}\cdot\frac{72}{72}+\frac{4}{9}\cdot\frac{96}{96}=\frac{1500}{864}\left(=\frac{125}{72}\cdot\frac{12}{12}=\frac{125}{72}\right)$$

Den valda gemensamma nämnaren är onödigt stor, det går att hitta en mindre. Den minsta vi kan hitta är den som alla tre nämnarna 8, 12 och 9 går jämnt upp i. Eftersom $8=2\cdot 2\cdot 2$, $12=2\cdot 2\cdot 3$ och $9=3\cdot 3$, måste den gemensamma nämnaren ha faktorn 2 tre gånger (se talet 8) och faktorn 3 två gånger (se talet 9). Men det räcker för 12 innehåller inte några nya faktorer eller fler av dem vi redan har. Den minsta gemensamma nämnaren, ofta betecknad MGN, är alltså $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=8\cdot 9=72$ och med den blir beräkningen $\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{9}+\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{6}+\frac{4}{9}\cdot\frac{8}{8}=\frac{125}{72}$

ÖVN. 1. Beräkna a) $13/15+7/10$ b) $18/11-31/22+31/33$

Division med ett rationellt tal brukar förorsaka bekymmer för många. En smula eftertanke visar dock att *division* med p/q är detsamma som *multiplikation* med (det inverterade = ”omvända”) q/p. Alltså $5/(2/3)=5\cdot(3/2)=15/2$ och

$$(3/4)/(7/12)=\frac{3}{4}/\frac{7}{12}=\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{7}=\frac{36}{28}\left(=\frac{9}{7}\right)$$

ÖVN. 2. Beräkna a) $15/(5/11)$ b) $(26/11)/(13/33)$ c) $(8\cdot 5-3\cdot 7)/(3-17/24)$

4. Algebraiska beräkningar
Vi kan nu utföra en hel del av ovanstående konststycken (och andra) med allmänna symboler (x, y, z, …, a, b, c, …) för godtyckliga tal. Att kunna räkna med sådana symboler gör att allmänna sanningar (satser) kan uttryckas (i formler alltså) och sedan kan man i det enskilda fallet ”sätta in” de aktuella värdena.

Den allmänna målsättningen med de algebraiska beräkningarna är att ”snygga till” uttryck som vi fått fram på något sätt. Man kan också vilja skriva om sin formel på ett speciellt sätt så att någon ämneslogisk (ekonomisk säg) förklaring av det studerade framträder klart. Vi använder då de räkneregler och konventioner som redovisats ovan. Några sådana är (kan man visa)

$a \cdot b = b \cdot a$ (”Självklart”? Tja, men $a - b \neq b - a$, där $\neq$ betyder ”ej lika med”)
$a + b = b + a$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (kan användas åt båda hållen)
$(x + y) \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b + y \cdot a + y \cdot b$

$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, men OBS!!!: $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ (varning för vanligt misstag)

Att göra liknämningt: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad + bc}{bd}$ (Här har multiplikationstecknet utelämnats och så blir det i fortsättningen när annat inte är befogat)

Förkortning: $\frac{a \cdot b \cdot x \cdot y}{b \cdot c \cdot y \cdot z} = \frac{a \cdot x}{c \cdot z}$ (*b* och *y* finns både i täljare och nämnare och kan förkortas bort, vi multiplicerar och dividerar ju med samma tal).

$x \cdot x$ kan vi skriva som x^2 och på samma sätt är $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ och $a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot b = a^3 b^4 c$.

Ibland finns anledning att ”vrida och vända” på uttryck, formler eller ekvationer. Om exempelvis $y = \frac{a}{b}$ så får vi genom multiplikation (*bägge leden*) med *b* resultatet att $yb = a$. Dividerar vi sedan med *y* får vi $b = \frac{a}{y}$.

En sak måste påpekas. Det är vanligt med felaktigt bruk av likhetstecknet. $A = B$ betyder ”värdet av det som står till vänster om likhetstecknet är lika med det som står till höger”. Vi kan alltså inte skriva (exemplet just ovan) $y = \frac{a}{b} = by = a$.
Förmodligen menar författaren till sådan smörja att det andra likhetstecknet betyder ”är samma sak som att” eller ”medför att”. Det kan då skrivas $y = \frac{a}{b} \Rightarrow by = a$, där

$\Rightarrow$ då just betyder ”medför att”. Givetvis går det lika bra att skriva detta i ord.

Exempel på tillämpning av ovanstående: Förenkla (”hyfsa”) uttrycket
$a(b-c)-c(d-a)-b(a+d)$
Vi får (kontrollera)
$a(b-c)-c(d-a)-b(a+d)=ab-ac-cd+ac-ab-bd=-cd-bd=-d(b+c)$

Ett exempel till: Utveckla och förenkla $(a+x)(a-x)+(x-b)(x-b)-(a+b)(a+b)$
Vi får (kontrollera och du behöver inte ”komma ihåg” kvadratregler eller konjugatregeln, vi kör igenom från scratch)
$(a+x)(a-x)+(x-b)(x-b)-(a+b)(a+b)=a^2-ax+xa-x^2+x^2-xb-bx+b^2-$
$-a^2-ab-ba-b^2=-xb-bx-ab-ba=-2bx-2ab=-2b(x+a)$ (eftersom det mesta tar ut varandra i det långa uttrycket)

ÖVN. 1. Utveckla och förenkla a) $(x-2y)(2y+x)$ b) $(x+y+z)(x-y-z)$
c) $2x(a-3y)+y(2a-x)-2a(x+y)$

ÖVN. 2. Skriv på formen p/q (gör liknämnigt) a) $1/a+1/b+1/c$
b) $(a+b)/a-(b-a)/b$ c) $1/a^2+1/b^2-2/(ab)$

Likaväl som det är bra att kunna ”utveckla” parenteser är det bra att kunna förenkla uttryck genom att införa parenteser. Exempelvis är $ac+ab-da=a(b+c-d)$. En faktor (”del av multiplikation”) som finns i alla termer (”åtskiljs av + eller –”) kan ”brytas ut” och resten sätts inom parentes. Ett exempel till:
$a^2b-b^2a+6ab=ab(a-b+6)$

ÖVN. 3. Snygga till uttrycken a) $(xa)^2-2ax$ b) $y^3z^2-y^2z^3+2y^2z^2$
c) * $ac+ad+bc+bd$ d) * $y^3z^2-y^2z^3+2y^2z^2+y-z+2$

Litet blandade övningar så långt:

ÖVN. 4. Talen x, y, z och a är relaterade genom formeln $y=\dfrac{x}{a+z}$. Skriv om detta uttryck så att vi får en formel av typen $z=$ (”lös ut *z*” säger vi)

ÖVN. 5. Det gäller att $(x+a)(x+b)=4$. Lös ut *a*.

ÖVN. 6. Förkorta (förenkla) $\dfrac{x^3a^2y^2a^3b}{xyxa^4b^2}$

ÖVN. 7. * Det är bekant (?) att $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Hur ser motsvarande formel för $(a+b)^3$ ut? (Tag fram den själv)

ÖVN. 8. Om vi betraktar *a* och *b* som konstanter och *x* som en ”obekant” hur ska vi välja *x* så att $(a-b)(b+x)=0$?

ÖVN. 9. * Att lösa en ekvation i säg x (med avseende på x) innebär att vi löser ut x i något uttryck så att vi får det på formen $x = \ldots$ (jfr övn. 4.). Inte sällan kan det finnas flera möjliga uttryck på högerledet här (när det finns flera lösningar = ”rötter”). Vi har uttrycket $(a-b)(b+x)=1$ givet och vi betraktar det som ekvationen. Lös ekvationen i tur och ordning med avseende på x, a och b. Går ekvationen alltid att lösa med avseende på dessa variabler?

ÖVN. 10. Lös ekvationen $x^2+5x-14=0$

ÖVN. 11. För vilka värden på a och b har ekvationen $x^2+ax+b=0$ lösningarna $x_1=-8$ och $x_2=7$?

ÖVN. 12. ** Hur ser den ”fjärdegradsekvation” ut som har (de fyra) lösningarna $x_1=x_2=2,\ x_3=-3$ och $x_4=-1$?

5. Allmänna exponenter

Här blir det en litet längre utläggning, men den torde inte skada.

Vi har tidigare definierat x^m för positiva heltal som $x^m = \overbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}^{m\text{ stycken}}$
Uppenbarligen gäller för positiva heltal m och n att

$$x^m\cdot x^n = (\overbrace{x\cdot\ldots\cdot x}^{m})\cdot(\overbrace{x\cdot\ldots\cdot x}^{n}) = \overbrace{x\cdot\ldots\cdot x}^{m+n} = x^{m+n},$$

alltså $x^m\cdot x^n = x^{m+n}$ (vilket ju är snyggt)

Men om m inte är ett positivt heltal *vad är då* x^m? Sanningen är (givetvis) att det inte finns något svar på den frågan förrän vi har *definierat* vad det ska vara (vad vi menar med det skrivsättet). För att definiera uttrycket så tar vi fasta på den snygga (och enkla) formeln ovan och säger att vi ska definiera x^m för vilket m som helst så att den snygga formeln även gäller för sådana m. Eftersom beteckningar som m och n gärna associerar till heltal så börjar vi med att försöka *definiera* x^m för talet 0 och för negativa heltal. För att inte trassla för mycket nöjer vi oss nedan tänker oss x som ett positivt reellt (godtyckligt) tal.

Vad *ska* x^0 vara. Sätt $x^0 = A$. Då vill vi att $x^m\cdot A = x^m\cdot x^0 = x^{m+0} = x^m$ ska gälla för varje positivt heltal m så då måste A vara lika med 1. Alltså *definierar* vi x^0 som $x^0=1$.

Sedan går vi över till negativa exponenter (m alltså). Vad ska x^{-m} betyda (om m är postivt heltal)? Den snygga formeln säger att $x^{-m}\cdot x^m = x^{-m+m} = x^0 = 1$, så det ska gälla att $x^{-m}\cdot x^m = 1$, så $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$. T.ex. är $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$
Det vara alla heltal m. Vi försöker nu utvidga definitionen till godtyckliga exponenter.

Det kan då vara lämpligt att byta ut *m* mot någon annan symbol eftersom *m* (och *n*) gärna associerar till heltal. Vi kan välja bostaven *a* i stället och ska alltså försöka oss på att hitta lämpliga definitioner på x^a, där *a* inte (nödvändigtvis) är ett heltal.
Vi börjar med att välja *a* som ett rationellt tal, d.v.s ett tal som kan skrivas $a = p/q$ där *p* och *q* är heltal (t.ex. 11/37, men inte $\pi = 3.14159...$).

Det "enklaste" rationella talet är $a = 1/2$. Vad ska $x^{1/2}$ vara? Det ska gälla $x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$, d.v.s $x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$, d.v.s $x^{1/2}$ multiplicerat med sig själv ska bli lika med *x*, d.v.s $x^{1/2}$ ska vara det vi gemenligen kallar kvadratroten ur *x*, alltså $x^{1/2} = \sqrt{x}$. T.ex är $121^{1/2} = 11$, $7.08^{1/5} = 2.6608...$ (använd miniräknare; resultatet är inte ett rationellt tal)

Ett annat enkelt tal är $a = 1/3$. För detta ska det gälla
$x^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot x^{1/3} = x^{1/3+1/3} \cdot x^{1/3} = x^{2/3} \cdot x^{1/3} = x^{2/3+1/3} = x^1 = x$
Alltså ska $x^{1/3}$ multiplicerat med sig själv *tre* (fast egentigen *två*) gånger vara lika med *x*. Detta tal kallar vi tredjeroten (eller kubikroten) ur *x*, $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$.
T.ex. är $8^{1/3} = 2$ $\quad 125^{1/3} = 5$ och $2005.3^{1/3} = 12.6103...$

På samma sätt definieras x^a för alla a på formen $a = 1/n$ där *n* är ett positivt heltal. $x^{1/n}$ är det tal som multiplicerat med sig själv *n* ($n-1$) gånger är lika med *x*.
T.ex. är $32^{1/5} = 2$ och $2005.3^{1/13} = 1.79479...$

Hur blir det nu med fall som $x^{5/11}$, alltså för godtyckliga rationella tal. Jo, för att den snygga formeln ska gälla så ska vi ha $x^{5/11} = x^{1/11+4/11} = x^{1/11} \cdot x^{4/11} = x^{1/11} \cdot x^{1/11+3/11} =$
$= ... = x^{1/11} \cdot x^{1/11} \cdot x^{1/11} \cdot x^{1/11} \cdot x^{1/11} = \left(x^{1/11}\right)^5$. Alltså, på samma sätt, ska det för godtyckligt $a = p/q$ gälla att $x^{p/q} = \left(x^{1/q}\right)^p$
T.ex. $2005.3^{5/11} = 31.69498...$ (Mata in i miniräknaren på följande sätt (normal räknare) 2005.3 $\wedge$ (5÷11) Enter. OBS! Viktigt med parenteser rätt)

Om nu inte *a* är rationellt då, t.ex. $a = \pi$ eller $a = \sqrt{2}$ (som inte kan skrivas $a = p/q$ med heltal *p* och *q*)? Rent matematiskt (stringent) är det värre och det ger vi oss inte in på. Vi kan ändå tänka oss hur det fungerar. För varje (icke rationellt) tal, t.ex. π, kan vi hitta ett rationellt tal som ligger godtyckligt nära det (hur nära som helst). T.ex. är $\pi \approx 314/100$ och $\pi \approx 31459/10000$ etc. och för varje sådan rationell approximation *a* kan vi beräkna x^a. Ju mer värdet på *a* här närmar sig π ju mer närmar sig x^a ett visst tal och detta tal är x^π. Vi har $2.1^{314/100} = 10.2746...$, $2.1^{314159/100000} = 10.2868146...$, $2.1^{3141592654/1000000000} = 10.28683489...$ (vilket är vad aktuell miniräknare ger som värde på 2.1^π. Det är inte självklart, men det går att visa att det resonemanget (strikt utfört) bibehåller satsen $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ för godtyckliga tal *a* och *b*.

För negativa värden på exponenten är definitionen även här $x^{-a} = 1/x^a$

Räkneregler (som vi har sett växa fram)

$x \geq 0$ (större än eller lika med 0), inte bara heltal. Exponenter (a etc.) godtyckliga.
$x^0 = 1$ (även för $x = 0$)
$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
$(x^a)^b = x^{ab}$
$x^{-a} = 1/x^a$
$(xy)^a = x^a \cdot y^a$ och därför också $(xyz)^a = x^a y^a z^a$ etc.

Men notera att $(x+y)^a$ definitivt inte är lika med $x^a + y^a$. Så är t.ex. $(a = 1/2)$ $\sqrt{x+y}$ inte lika med $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ (pröva t.ex med $x = 4$ och $y = 9$)

ÖVN. 1. Beräkna (utan miniräknare) a) $16^{1/2}$ b)$16^{1/4}$ c) $16^{-1/4}$ d) $64^{1/3}$
e) $64^{2/3}$ f) $9^{2.5}$ g) $2^{1/4} \cdot 8^{1/4}$ h) $2^{5/4} \cdot 8^{1/4}$ i) * $3^{0.7} \cdot 6^{-1.4} \cdot 9^{0.35} \cdot 4^{0.7}$

ÖVN. 2. Beräkna (med miniräknare) a) $1.234^{0.45}$ b) $7.68^{-1.24} \cdot 5.29^{2.12}$
c) $14.13^{0.35} + 3.98^{0.35}$ d) $14.13^{0.73} + 14.13^{0.27}$

6. Absolutbelopp

Ibland har man anledning att studera det absoluta beloppet av ett tal. Det absoluta beloppet av talet *x* är talet *x* självt om det är större än eller lika med 0 och lika med $-x$ om talet är negativt. För absolutbeloppet används symbolen $|\ |$ och det gäller helt enkelt att $|5| = 5$ och $|-7| = 7$.

Absolutbeloppet av *x* kan ses som talets ”avstånd” till värdet 0 (på en tallinje). Absolutbeloppet kan därför användas för att beskriva avståndet till vilket värde (tal) som helst. Så är t.ex. värdet av $|x-5|$ lika med avståndet till talet 5 (pröva genom att sätta in några olika värden på *x*. Så får vi för $x = 7$ värdet $|7-5| = |2| = 2$.) På samma sätt är t.ex. $|x+13| = |x-(-13)|$ avståndet från *x* till talet -13. Den här användningen är nog den viktigaste.

Innanför absolutbeloppstecknet kan vi räkna som vanligt, så är t.ex $|2 + 3 \cdot 4 - 5| = |9| = 9$. Däremot finns det inga ”bra” räkneregler för att ”sätta ihop” eller förenkla olika absolutbeloppsuttryck som t.ex. $|x| + |y|$ eller $|x+y|$. Vi kan dock se att $|xy| = |x| \cdot |y|$

ÖVN. 1. För vilket eller vilka tal *x* är a)$|x-8| = 4$ b) $|x+11| = 5$ c) $|x+1| = -1$
d) * $|x-6| = |x-10|$

7. Olikheter

Praktiskt taget alltid stöter vi på restriktioner för vårt agerande. Om vi t.ex. ska handla mat och har 200 kr med oss (och inget kontokort el.dyl.) så får vår totala inköpssumma givetvis inte överskrida 200 kr. Ska vi avverka skog kan vi självklart inte avverka mer än vad som är avverkningsbart. Å andra sidan måste vi avverka så pass mycket att det blir lönsamt (åtm. på sikt). En industri (såg t.ex.) har begränsningar i maskiner och personal m.m att ta hänsyn till när det gäller att bestämma storleken och sammansättningen av sin produktion.

För att beskriva restriktioner vid analyser används olikheter och olikhetstecken. Olikhetstecknen är $<$ och $\leq$, som vi också kan ”vända på” så att de blir $>$ och $\geq$.

Olikheten $a < b$ innebär att talet a är (ska vara) *mindre* än talet b.
Olikheten $a \leq b$ innebär att talet a är (ska vara) *mindre än eller lika med* talet b.
Det senare är detsamma som att säga att *a är högst lika med b*.
Notera att ”pilen” i $<$ pekar på det mindre av talen.

Olikheten $a < b$ är detsamma som $b > a$ och $a \leq b$ detsamma som $b \geq a$.

I avverkningsexemplet ovan ska ett tal a (avverkningen) vara både högst lika med ett tal, b säg, och samtidigt minst lika med ett annat tal c. Det skriver vi med två olikhetstecken, $c \leq a \leq b$, vilket innebär att *båda* olikheterna ska gälla. Skulle det här inte vara tillåtet att (gälla att) $a = c$ (men att $a = b$) så beskriver vi det som $c < a \leq b$ (o.s.v.)

Exempel: a) $3 < 4$ b) $-4 < -3$ c) $3 \leq 4$ d) $-3 \leq -3$ e) $2 < 4 < 5$ f) $2 \leq 4 \leq 5$
g) $-3 \leq 4$ h) $-1 < 0 < 1$

Hur ska vi tänka oss en olikhet given i symboler, t.ex. $x \leq a$ eller ett litet mer komplicerat fall som $x^2 \leq a$? Man kan i praktiken grovt skilja på två (närbesläktade) fall, nämligen

1. Vi ska beräkna något som beror på x, men det måste gälla att $x^2 \leq a$. Vi måste med andra ord *kontrollera* att $x^2 \leq a$ är sant för ett viss val av x.
2. Vi vill på ett enklare sätt än genom $x^2 \leq a$ beskriva den talmängd i x som gör att $x^2 \leq a$ är sant.

Exempel. Vi vill bestämma största och minsta värdet av $y = 7 + 2x$, där det dock måste gälla att $x^2 \leq 9$. Eftersom x multipliceras med det positiva talet +2 för beräkning av y inser vi att ju större x vi väljer ju större blir y. Men prövar vi $x = 4$ ser vi att olikheten $x^2 \leq 9$ inte är uppfylld. En smula eftertanke visar att det största värdet på x vi kan välja är $x = 3$ som också ger det största värdet $y = 7 + 2 \cdot 3 = 13$ för y.
För att bestämma det minsta möjliga y-värdet ska vi uppenbarligen hitta det minsta tillåtna x-värdet som uppfyller $x^2 \leq 9$ och det är $x = -3$ som ger y-värdet 1.
Genom detta grubblande ser vi också att $x^2 \leq 9$ är detsamma som $-3 \leq x \leq 3$, som alltså är ett svar på frågan (fall 2) ”för vilka x gäller $x^2 \leq 9$”?

Not. Notera att vi i bägge fallen ovan använt ordet ”sann” (sant). En olikhet, liksom en likhet, kan vara sann eller falsk. Vi vill givetvis hålla oss till de sanna.

ÖVN 1. Vilka av följande olikheter är sanna? a) $5 > 6$ b) $-5 \geq -6$ c) $5 > -6$
d) $|5| > |-6|$ e) $11 < 12 \leq 13$ f) $11 < 12 \leq 12$ g) $11 < 12 < 12$ h) $2 < 5 \geq 3$

ÖVN 2. * Bestäm största och minsta värdet av $y = 3 + 4x + x^2$ under förutsättning att $0 \leq x \leq 3$ (Den som vill derivera kan inte hindras göra det.) Notera att vi kan skriva $y = 3 + 4x + x^2 = (x+2)^2 - 1$

Räkneregler

Man kan vilja ”manipulera” (förenkla) olikheter, och för det är det bra med regler för vad vi kan göra och vad resultatet blir. Innan vi beskriver regler ska bara sägas att i det praktiska livet är det normalt inte viktigast att kunna räkna på olikheter, utan *att kunna formulera olikheterna*. Så till reglerna.

(1) $a < b$ är detsamma som $a + d < b + d$ (samma sak med $\leq$)
Vi kan *addera* eller *subtrahera* samma tal till *bägge sidorna* av ett olikhetstecken.
Det gäller också att $c < a < b$ är detsamma som $c + d < a + d < b + d$

(2) Om g är ett *positivt* tal ($g > 0$) så är $a < b$ detsamma som $ag < bg$
Vi kan alltså *multiplicera* eller *dividera* bägge sidorna av en olikhet med samma *positiva* tal. (Samma sak med $\leq$ och dubbla olikheter)

(3) Om g är ett *negativt* tal ($g > 0$) så är $a < b$ detsamma som $ag > bg$
Om vi *multiplicera* eller *dividera* bägge sidorna av en olikhet med samma *negativa* tal kastas olikhetstecknet om.

(4) Dividera aldrig de bägge sidorna av en olikhet med något som kan ha värdet 0.
Specialbehandla sådana fall.

Exempel på användning. För vilka x gäller $\dfrac{x-7}{3} \leq 4 + \dfrac{3x-2}{2}$?
Vi kan göra liknämningt (som vanligt). MGN $= 6$. Vi multiplicerar alla termer med 6 och eftersom det är positivt behålls (riktningen på) olikhetstecknet. Efter förkortning med 3 resp. 2 får vi (se upp med parenteserna!) $2(x-7) \leq 6 \cdot 4 + 3 \cdot (3x-2)$, vilket efter utveckling blir $2x - 14 \leq 24 + 9x - 6$ och ytterligare förenkling $2x - 14 \leq 18 + 9x$
Vi kan nu använda additionsregeln (regel 1) och ”flytta över” både x-termer och konstanter. Vi får då $-14 - 18 \leq 9x - 2x$, d.v.s $-32 \leq 7x$. Till sist kan vi dividera med det positiva talet 7 som ger resultatet $-32/7 \leq x$, vilket vi kanske hellre vill skriva som $x \geq -32/7$. Vad vi nu har gjort är att vi har skrivit om den ursprungliga olikheten på en mycket enklare form. Det är exakt samma x-värden som uppfyller bägge varianterna.

Ett annat (mer komplicerat) fall. För vilka x gäller $x^2 - 6x + 13 > 5$?
Detta är detsamma som $x^2 - 6x + 8 > 0$. Löser man ekvationen $x^2 - 6x + 8 = 0$ får man rötterna 2 och 4 och använder man faktoreringssatsen (övning 11, avsnitt 4) ser vi att $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Vårt problem är alltså att bestämma för vilka x som

olikheten $(x-2)(x-4)>0$. Vi har laborerat en smula med den ursprungliga olikheten för att få en nolla på ena sidan. Det förenklar ofta. Nu skulle vi vilja dividera den nya varianten med t.ex. $(x-4)$ för då blir det bara $x-2>0$ kvar, och det är detsamma som $x>2$. Kruxet är bara att vi inte vet om $x-4$ är positivt eller negativt (reglerna 2 och 3), eller t.o.m 0. *Vi måste dela upp i olika fall*:
A. Om $x-4>0$, d.v.s. om $x>4$, kan vi dividera och behålla olikhetstecknet och olikheten blir ekvivalent med $x-2>0$, d.v.s. $x>2$. Alltså: Om $x>4$ *och* $x>2$ så gäller olikheten. Villkoret $x>4$ *och* $x>2$ är detsamma som att $x>4$.
B. Om $x-4<0$, d.v.s. om $x<4$ kan vi åter dividera med $(x-4)$ men vi måste då kasta om olikhetstecknet. Vi får då alltså villkoret $x-2<0$, d.v.s. $x<2$. Alltså: Om $x<4$ *och* $x<2$ så gäller olikheten. Villkoret $x<4$ *och* $x<2$ är detsamma som att $x<2$.
C. Vi har fallet $x-4=0$ kvar. Nu kan vi inte dividera, men vi kan kolla direkt. $4^2-6\cdot 4+13=5$ och $5>5$ är inte sant. Olikheten gäller därför inte för $x=4$.
Det slutliga svaret är alltså att olikheten gäller dels för alla $x>4$ och dels för alla $x<2$.
(Anm. Det finns ”scheman” för ”lösning” av sådana här olikheter, men att lära sig sådana utantill är nog bortkastad tid. Direkt tillämpning av räknereglerna ger mer eftersom de alltid duger och verklighetens olikheter sällan är ”andragradare”)

ÖVN 3. För vilka x gäller olikheten $\dfrac{2-3x}{5}+\dfrac{x-7}{3}>\dfrac{11+12x}{15}-4$?

ÖVN 4. * För vilka x gäller olikheten $x^2-x\le 6$?

<u>Olikheter, ”avstånd” och talmängder</u>
Genom att använda olikhetstecken och absolutbelopp kan ofta förekommande talmängder anges på ett trevligt sätt. De x som t.ex. uppfyller $|x-1|\le 2$ är de tal x vars avstånd (absolutbeloppet!) till talet 1 är högst lika med 2. De talen utgörs uppenbarligen av mängden $-1\le x\le 3$. De tal som uppfyller $|x+5|>1$ är de tal vars avstånd till talet -5 (tecknet!) är större än 1, d.v.s. dels av talen $x>-4$ och dels av talen $x<-6$. Generellt utgör de tal x som uppfyller $|x-a|\le r$ den mängd vars avstånd till talet a är högst lika med r.

ÖVN 5. Skriv utan absolutbelopp, bara med olikhetstecken, de mängder som uppfyller a) $|x-4|<2$ b) $|x-5|\ge 3$ c) $|x+3|\ge 4$ d) * $1\le|x-2|\le 3$

ÖVN 6. Skriv följande mängder med hjälp av absolutbelopp
a) $2\le x\le 4$ b) ”Dels” $x>6$ och ”dels” $x<2$ (”unionen” alltså)

ÖVN 7. Vilka av följande påståenden är sanna (försök bevisa eller ge motexempel)
a) Om $a^2>b^2$ så är $a>b$ b) Om $ac>bc$ så är $a>b$
c) Om $a>b$ så är $a^2>b^2$ d) Om $a>b>0$ så är $1/b>1/a>0$
e) Om $a>b$ och $c>d$ så är $a+c>b+d$

8. Linjära ekvationssystem

Bakgrund

Linjära uttryck (eller funktioner) dyker upp i de allra mest skiftande sammanhang. Ett fall stöter vi på dagligen, nämligen i matvaruaffären. Vi köper kvantititen q_1 av vara nummer 1, och den kostar p_1 kronor per enhet (t.ex. 3 kg för 13.80 kr per kg). Vi köper sedan kvantiteten q_2 av vara nummer 2 till priset p_2 (t.ex. 0.345 kg för 118 kr per kg), kvantiteten q_3 av vara 3 till priset p_3 (t.ex. 6 stycken à 8.40) o.s.v. För allt detta får vi sedan betala C där

$$C = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + \ldots \qquad (C = 13.80 \cdot 3 + 118 \cdot 0.345 + 6 \cdot 8.40 + \ldots)$$

Samma sorts enkla beräkning uppstår självklart i andra situationer, i ett industrifall skulle p_i-na kunna vara arbetskostnad per producerad enhet av typ nummer i och q_i den fabricerade mängden, och då är C den totala (rörliga) produktionskostnaden. Värdet av en skog (rotpost) beräknas också på samma sätt, med pris och förråd i olika trädslags- och kvalitetsklasser.

Uttrycket för C ovan är linjärt i variablerna $q_1, q_2, q_3, \ldots$ för fixerade värden på $p_1, p_2, p_3, \ldots$. En ökning av q_1 med en enhet till $q_1 + 1$ gör att C ökar med beloppet p_1 och detta oavsett värdet på q_1 eller på något av de andra värdena (lägger vi på ett kg av vara 1 får vi betala 13.80 mer, oavsett tidigare kvantiteter). Uttrycket är också linjärt i variablerna $p_1, p_2, p_3, \ldots$ för fixerade värden på $q_1, q_2, q_3, \ldots$.

Vi vill nu inte betala mer än nödvändigt. Vi vill därför välja $q_1, q_2, q_3, \ldots$ så att C minimeras. Det gör vi om vi sätter alla q_i till 0. Men då blir det snart bara en våt fläck kvar av oss. Det finns restriktioner (”allt är inte tillåtet”) och de uttrycks oftast med hjälp av olikheter (se avsnitt 7), t.ex. $q_1 + 4q_4 + 2q_5 \geq 4$, vilket skulle antyda att varorna nummer 1, 4 och 5 är delvis utbytbara (potatis, ris, pasta) men att man behöver en viss total mängd av dem. Typiskt är att även restriktionen (som oftast kallas bivillkor) är linjär i q-variablerna. I det praktiska fallet är antalet sådana bivillkor mycket stort.

Vårt problem är nu att minimera totalkostnaden C under förutsättning att alla restriktioner (bivillkor) är uppfyllda. Eftersom alla uttryck som igår är linjära kallas problemet ett linjärt optimeringsproblem. Vi ska inte lösa något sådant här. Det finns en speciell metod som kallas *linjärprogrammering* för att göra det (trots namnet har metoden egentligen ingenting med datorprogram att göra). Men metoden grundar sig till nära 100 procent på lösning av linjära ekvationssystem, och det står nu på tur. Linjära ekvationssystem uppträder inte bara vid optimeringsproblemet utan i de många andra sammanhang.

Linjära ekvationssystem

Linjära ekvationssystem består av ett antal linjära ekvationer, där ekvationerna innehåller flera variabler (obekanta). Ett system med två ekvationer och två obekanta är t.ex.

$$2x - 3y = 7$$
$$3x + 2y = 17$$

Vi har två obekanta x och y (de motsvarar q-värden i ”Bakgrunden”). En lösning till systemet är två tal x och y som gör att bägge uttrycken är sanna (”stämmer”).

Generellt kan vi ha m stycken ekvationer med totalt n stycken variabler. Oftast är $m = n$, men så är inte alltid fallet.

<u>Lösningsmetoder</u>
Det finns flera sätt att lösa linjära ekvationssystem. Vi tar upp två stycken, substitutionsmetoden och Gauss’ eliminationsmetod. Vi börjar med det lilla systemet ovan.

Substitutionsmetoden är kanske den man kommer på först, men den har stora nackdelar, speciellt för stora ekvationssystem. På systemet ovan fungerar den på följande sätt:

1. Vi ”löser ut” en av variablerna i den första ekvationen.
   Vi får, om vi löser ut y, $3y = 2x - 7$ och efter division $y = 2x/3 - 7/3$
2. Vi sätter in detta i den andra ekvationen, d.v.s. byter ut y mot uttrycket ovan.
   Vi får (parentesen!) $3x + 2 \cdot (2x/3 - 7/3) = 17$ vilket vi räknar vidare på. Vi får

$3x + 4x/3 - 14/3 = 17$	Gör liknämnigt, d.v.s. multiplicera med 3:
$9x + 4x - 14 = 51$	Hyfsa
$13x = 65$	Dividera med 13
$x = 5$	Det var x. För y använd $y = 2x/3 - 7/3$
$y = 2 \cdot 5/3 - 7/3 = 3/3 = 1$	

   Lösning: $x = 5 \quad y = 1$

Gauss eliminationsmetod, eller varianter av den, är den som används i datorprogram. För att visa hur den går till skriver vi upp systemet igen

$$2x - 3y = 7$$
$$3x + 2y = 17$$

Låt oss till att börja med att koncentrera oss på variabeln y. I den första ekvationen har den *koefficienten* -3 och i den andra koefficienten $+2$. Om vi därför multiplicerar den första ekvationen med 2 (alla termerna, annars blir det fel!) och den andra ekvationen med 2 så kommer de nya koefficienterna för y att bli -6 resp. $+6$. Närmare bestämt får vi systemet (och det har samma lösning som det givna)

$$4x - 6y = 14$$
$$9x + 6y = 51$$

Nu kan vi *addera* ekvationerna, bägge uttrycken är ju sanna, och då kommer variabeln y att försvinna. Man säger att den eliminerats. Vi får kvar

$$13x = 65$$

med lösningen $x = 5$. För att få fram värdet på y kan vi stoppa in $x = 5$ i någon av de ursprungliga ekvationerna. Den första ger $2 \cdot 5 - 3y = 7$, d.v.s. $3y = 3$ och $y = 1$.

Gauss eliminationsmetod innebär alltså att vi successivt eliminerar variabler genom att se till att koefficienterna för aktuell variabel har samma absolutbelopp. I fallet ovan blev *tecknen* olika och då ”försvann” y genom att vi adderade ekvationerna. Hade tecknen varit lika skulle vi i stället ha *subtraherat* den ena ekvationen från den andra.

Vi betraktar nu ett system med tre ekvationer och tre obekanta. De obekanta får symboliseras av x, y och lilla z. För att hålla ordning på grejorna numreras dessutom ekvationerna med (1) etc.

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad 7x - 9y + 5z = 46 \\
&(2) \qquad -3x + 4y - 9z = -27 \\
&(3) \qquad 2x - 3y + 10z = 23
\end{aligned}
$$

Vi ska nu eliminera (”få bort”) *en* variabel åt gången. Antag att vi väljer (valet är fritt) att eliminera z. Vi kommer då att ha kvar två obekanta, x och y. För att lösa det resulterande systemet i x och y behövs två ekvationer. Det kommer vi också att få genom att först eliminera z i ekvationerna (1) och (2). Vi har då inte använt ekvation (3). Genom att sedan eliminera z i ekvationerna (1) och (3) får vi en andra ekvation i bara x och y. Så här:

Koefficienten för z i ekv. (1) är 5, i ekv. (2) är den -9. Om vi därför multiplicerar ekv. (1) med 9 och ekv. (2) med 5 får vi samma absolutbelopp på koefficenterna för z:

$$
\begin{aligned}
&9 \cdot (1) \qquad 63x - 81y + 45z = 414 \\
&5 \cdot (2) \qquad -15x + 20y - 45z = -135
\end{aligned}
$$

Tecknen för z-koefficienten är olika så vi adderar ekvationerna. Detta ger vår första nya ekvation med bara x och y. Den får nummer (4):

$$(4) \qquad 48x - 61y = 279$$

Sedan upprepar vi samma sak, nu med ekvationerna (1) och (3) (vi hade kunnat välja (2) och (3) i stället). Det är z som ska bort igen. Eftersom den har koefficienten 5 i ekv. (1) och 10 i ekv. (3) räcker det att multiplicera ekv. (1) med 2

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot (1) \qquad 14x - 18y + 10z = 92 \\
&1 \cdot (3) \qquad 2x - 3y + 10z = 23
\end{aligned}
$$

Nu är tecknen lika så vi *subtraherar* t.ex. den andra ekvationen från den första. Resultatet blir en ny ekvation, nummer (5)

$$(5) \qquad 12x - 5y = 69$$

Nu utgör ekvationerna (4) och (5) ett system om två ekvationer med två obekanta. Vi löser det som tidigare. En snabbtitt på koefficienterna visar att det nog är enklast att eliminera *x*, vi behöver då bara multiplicera ekv. (5) med 12,

$$\begin{array}{rl} 1\cdot(4) & 48x-61y=279 \\ 12\cdot(5) & 48x-60y=276 \end{array}$$

Vi subtraherar t.ex. den första ekvationen från den andra här, vilket leder till resultatet

$$y=-3$$

För att få ut *x* och *z* går vi tillbaka, och vi tar dem i omvänd ordning mot den de eliminerats i. Alltså *x* först. Vi sätter in $y=-3$ i t.ex. ekv. (5), vilket ger $12x-15\cdot(-3)=69$, d.v.s. $12x+45=69$, d.v.s. $12x=24$, så

$$x=2$$

Vi sätter därefter in $x=2$ och $y=-3$ i ekv. (1). Detta ger $7\cdot 2-9\cdot(-3)+5z=46$, vilket efter några operationer ger

$$z=1$$

Anm. Den som vill kan testa att lösa systemet ovan med substitutionsmetoden och själv göra en bedömning av vilken metod som är enklast.

ÖVN. 1 Lös följande ekvationssystem med två obekanta

a) $\begin{array}{r} 5x-8y=7 \\ 5y=5 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 8x+3y=-1 \\ 2x-y=5 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} 11x-13y=5 \\ 7x+3y=37 \end{array}$

ÖVN. 2 Lös följande system med tre obekanta

a) $\begin{array}{l} 2x+3y+4z=13 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 4x+5y+2z=13 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 2x-5y-8z=3 \\ 3x+7y+3z=21 \\ 4x+13y \quad\;\; =1 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} -5x+y+4z=-30 \\ 2x+7y+5z=-7 \\ 3x-4y-3z=17 \end{array}$

<u>När antalet ekvationer inte är lika med antalet obekanta</u>
Vid vissa sorts analyser, speciellt det linjära optimeringsproblemet (se ”Bakgrund”), är antalet ekvationer *m* mindre än antalet obekanta *n*. Ett exempel på detta får vi om vi stryker ekvation (3) i avsnittet ovan, så att vi har systemet

$$\begin{array}{rl} (1) & 7x-9y+5z=46 \\ (2) & -3x+4y-9z=-27 \end{array}$$

Det finns då oändligt många lösningar till systemet. Det kan vi inse genom att vi kan sätta in en tredje ekvation, nästan vilken som helst, t.ex. $z = 1$, $z = -12$, $x + y = 4$ och för varje sådant val av tredje ekvation får vi en lösning x, y, z. (De enda ekvationer vi inte får sätta in som tredje är sådana som säger samma sak som (1) + (2)). Men även om det finns oändligt många lösningar så är inte alla möjliga tal-triplar x, y, z lösningar. Så är t.ex. $x = y = z = 1$ inte lösning till ekvationssytemet (sätt in och pröva!). För att beskriva lösningarna (mängden av alla lösningar) *flyttar vi över så många obekanta till högerledet* så att antalet obekanta i vänterledet är lika med antalet ekvationer. I exemplet här ska vi alltså flytta över $3 - 2 = 1$ obekant till höger. Låt oss välja t.ex. *y*. Vi skriver därför systemet

$$\begin{aligned} &(1) \qquad 7x + 5z = 46 + 9y \\ &(2) \qquad -3x - 9z = -27 - 4y \end{aligned}$$

Sedan eliminerar obekanta *till vänster* som förut. Låt oss eliminera *z* enligt

$$\begin{aligned} &9 \cdot (1) \qquad 63x + 45z = 414 + 81y \\ &5 \cdot (2) \qquad -15x - 45z = -135 - 20y \end{aligned}$$

Addition ger $48x = 279 + 61y$ så

$$x = 279/48 + 61y/48$$

Vi kan sedan sätta in detta i ekv. (1), eller enklare eliminera *x* genom att bilda $3 \cdot (1) + 7 \cdot (2)$. Vi får då

$$z = 51/48 + y/48$$

Vi har då löst systemet i x och *z*, med *y* som fri *parameter*. Vi kan välja värdet på *y* godtyckligt, men när det väl är valt så ges *x* och *z* av uttrycken ovan. Speciellt ger $y = -3$ vår ”gamla” lösning $x = 2$ och $z = 1$ åter.

För godtyckligt *m* och *n*, med $m < n$, får vi $(n - m)$ fria parametrar.

ÖVN 3. Lös ut x och w i ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 3z - 4w &= 24 \\ 3x + 2y + 2z + 3w &= 26 \end{aligned}$$

Ibland kan i stället antalet ekvationer vara fler än antalet obekanta. Antingen finns då ingen lösning eller så ”säger flera ekvationer samma sak”. Med två obekanta *x* och *y* och tre ekvationer kan vi lösa *x* och *y* med hjälp av de två första ekvationerna. ”Stämmer” resultatet med den tredje ekvationen var den onödig (sa samma sak), stämmer det inte finns ingen lösning. Det kan inträffa att ekvationer säger samma sak även om $m = n$, men vi fördjupar oss inte ytterligare i detta.

9. Funktioner

Funktionsbegreppet är centralt i matematiken och dess tillämpningar. Det kan naturligtvis ”konstras till” om man vill vara matematiskt stringent, men annars är det relativt enkelt. En variabel y är en funktion av en annan variabel x om man kan räkna ut värdet av y om man känner värdet av x. Vi skriver detta nedan som

$$y = f(x)$$

Här symboliserar f den räkneregel vi ska använda, och f är själva funktionen, medan x kallas argument. Ofta är räkneregeln given som ett matematiskt uttryck. (Det finns många varianter på beteckningssystem, som kan vara mer sofistikerade än det ovan)

Exempel. $y = f(x) = 4 + x^2$. Om vi känner x (t.ex om $x = 1.5$) kan vi räkna ut y (värdet blir $4 + 1.5^2 = 6.25$). Notera här att x inte blir en funktion av y eftersom ekvationen $y = 4 + x^2$ har *två* lösningar $x = \sqrt{y-4}$ och $x = -\sqrt{y-4}$ (om $y \geq 4$) och om inget annat sägs vet vi inte vilken som gäller.

Uttrycket $y = f(x)$ innebär att vi i räkneregeln f ska ”sätta in” x, d.v.s. det som står inom parentesen, för att beräkna y. Om vi därför betraktar funktionen i exemplet och vill beräkna $y = f(\sqrt{x+3})$ så blir $y = 4 + \left(\sqrt{x+3}\right)^2 = x + 7$.

Många gånger beror det vi är intresserade av, y alltså, inte på bara *en* variabel utan på flera. Volymen y av en rät cirkulär cylinder med basradien r och höjden h beräknas genom formeln $y = \pi h r^2$. I ”Bakgrunden” i avsnitt 8 har vi sett exempel på (linjära) funktioner av många variabler. För en funktion f av två variabler (argument) t och u (säg) skriver vi $y = f(t,u)$. För en funktion av p stycken argument används index, så vi skriver $y = f(x_1, x_2, ..., x_p)$.

ÖVN 1. Låt funktionen f vara given genom $f(x) = \dfrac{x+15}{x^2+1}$.
Bestäm a) $f(2)$ b) $f(-15)$ c) $f(a)$ d) $f(1/x)$

ÖVN 2. Låt f vara en funktion av tre variabler, definerad genom
$f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z} - 3xyz + 2x/y$
Bestäm a) $f(1,2,1)$ b) $f(0,1,3)$ c) $f(a^2, a^2, 7a^2)$ d) $f(x,-x,0)$

ÖVN. 3. Funktionerna f och g är givna genom $f(x) = 1 + 3x + x^2$ och $g(x) = 5 + 20/x$. Funktionen h är definierad genom $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)/5 + 3x$.
Bestäm $h(1,2)$

ÖVN 4. Låt f vara funktionen $y = f(x) = 3 + 4x$. Visa att x då också är en funktion $x = g(y)$ av y. Hur ser funktionen g ut (räkneregel)?

Elementära funktioner
Givetvis finns det oändligt många funktioner. Några sorters funktioner uppträder dock oftare än andra vid matematiska tillämpningar och har därför givits speciella namn. De värden man får för flertalet sådana funktioner finns också i regel inprogrammerade i vanliga fickkalkylatorer. Funktionerna kallas de *elementära funktionerna*. Hit hör

Potensfunktionen $y = x^a$ (som vi egentligen har gått igenom i avsnitt 5)

De trigonometriska funktionerna sin, cos, tan, cot (och deras ”inverser”)

Logaritmfunktionen ln (eller log)

Exponentialfunktionen e^x, eller allmänt a^x ($a > 0$) ($e = 2.7182818...$) $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

… och några till

Vi ska inte här ta upp detaljer utan bara några frågor som studenter brukar ställa.

De trigonometriska funktionerna dyker naturligt upp i samband med geometriska problem, men även ofta när det man studerar kan beskrivas grafiskt som en kurva över en tidsaxel. Argumenten till de trigonometriska funktionerna är vinklar. Vinklar kan anges i grader eller radianer, och det råder sambandet v grader $= \dfrac{\pi}{180} \cdot v$ radianer (ett cirkelvarv på 360 grader är ett cirkelvarv på 2π radianer). Givetvis är $\sin(45^0) = \sin(\pi / 4 \,\text{rad}) = 0.7071...$, d.v.s. sinus för en vinkel beror inte på hur den mäts. Se bara till att ställa in kalkylatorn på rätt och önskad enhet. För vinklar upp till 90 grader ($\pi / 2$ radianer) är $\sin(v) =$ kvoten mellan längden på den mot vinkeln motstående kateten och längden på hypotenusan (i en rätvinklig triangel). För vinklar över 90 grader utvidgas sinus-funktionen genom den s.k. enhetscirkeln (cirkel med radien 1), där viss vinkel gentemot en x-axel genom sin radie ger en punkt på cirkelns periferi (slutet på tårtbiten) och sinus är lika med punktens y-koordinat (rita figur). På samma sätt är $\cos(v) =$ längden av den närstående kateten dividerad med längden av hypotenusan (och utvidgat periferipunktens ”x-koordinaten”). $Tan(v) = \sin(v)/\cos(v)$ och $Cot(v) = 1/\tan(v)$ slutligen (man klarar sig bra utan cot).

”Jag förstår inte logaritm” får man inte sällan höra. Jag vet inte om man direkt kan säga att logaritm går att ”förstå” i ordets vanliga bemärkelse. Orsaken till att den finns, och är viktig, är en trevlig egenskap, nämligen att $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$, alltså att funktionsvärdet av en produkt är lika med summan av funktionsvärdena av de i produkten ingående termerna. T.ex. är $\ln(15) = \ln(3) + \ln(5)$, vilket lätt kontrolleras med en räknare.Det gäller också att $\ln(x / y) = \ln(x) - \ln(y)$. Detta är den historiska orsaken till funktionens uppkomst, det är mycket enklare att summera tal med många siffror (t.ex. 123.45678 + 357.19372) än att multiplicera dem (exakt hur detta gjordes får anstå till något senare tillfälle). Det har dock visat sig att logaritm-funktionen dyker upp i många andra sammanhang. Till logaritm-funktionen hör en ”bas”, men man kan gott hålla sig till den s.k. ”naturliga” logaritm, med basen e

($e = 2.7182818...$) . Det finns ingen anledning att dribbla med 10-logaritmer. Dataingenjörer kan med fördel (?) använda sig av basen 2. Varför talet *e* är praktiskt framgår i avsnitt 11 om derivator. Funktionen $\ln(x)$ är definierad endast för $x > 0$.

Exponentialfunktionen är logaritm-funktionens s.k. *invers*. Detta innebär att om $y = \ln(x)$ så är $x = e^y$. Exponentialfunktionen uppträder naturligt vid frågor rörande populationstillväxter, radioaktivt sönderfall, ränta-på-ränta o.s.v. Även här klarar man sig oftast med talet *e*.

På räknare finns också inverser till de trigonometriska funktionerna (som arcsin, asin eller $\sin^{-1}$). Man får dock se upp litet. T.ex. är (med alla vinklar i radianer) $\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6) = \sin(7\pi/6) = ... = 0.5$. Slår man in $\sin^{-1}(0.5)$ på räknaren får man värdet $0.5235987\ldots = \pi/6$. Det visar sig att $\sin^{-1}$ alltid ger en vinkel mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$. Skulle man i exemplet här vilja ha en vinkel *v* mellan $\pi/2$ och π vars sinus är 0.5 (alltså $5\pi/6$) får man fixa en korrigering själv (π minskat med det värde som räknaren ger).

ÖVN 5. Använd räknare för att beräkna följande funktionsvärden
a) $\sin(37^0)$ b) $\sin(-2.123)$ (argument i radianer) c) $\ln(123)$ d) $\ln(11+14)$
e) $\ln(11\cdot 14)$ f) $\ln(11/14)$ g) $\ln(6+x^2)$ för $x=-2$ h) $e^{2x-\sqrt{x+1}}$ för $x=1.6$
i) den vinkel (i grader) mellan 0 och 180 grader vars cosinus är lika med 0.81
j) * det värde *x* som gör att $12e^x = 8.37$ k)* det värde *x* som gör att $\ln(x+30) = 4.52$

Förutom de upptagna funktionerna ovan finns många andra ”namngivna” funktioner som Besselfunktioner, Elliptiska funktioner, Gammafunktionen o.s.v. De finns inte inprogrammerade i vanliga fickkalkylatorer, men för den som kan behöva dem finns matematiska programbibliotek som kan användas. Inom statistiska tillämpningar möter man också många s.k. fördelningsfunktioner som normalfördelningen, t-fördelningen, F-fördelningen o.s.v. Dessa funktioner finns lätt tillgängliga i användarvänliga programpaket (t.ex. Minitab) som studenten säkerligen kommer i kontakt med under sin studietid.

10. Koordinatsystem. Räta linjens ekvation

Egentligen skulle vi gå direkt på derivator här (efter funktionerna), men vi behöver ”räta linjens ekvation” och för det behöver vi koordinatsystem. Så låt oss börja med det senare.

Koordinatsystem används i första hand för att ange punkters positioner i förhållande till en fix punkt. Den fixa punkten kallas *origo*. Det finns många möjliga sätt att ange en punkts position i förhållande till origo.

Det mest ”kända” sättet är det Cartesiska systemet med vinkelräta axlar, x- och y-axel. Det fungerar på samma sätt som när vi på en karta (eller i naturen) orienterar oss i ÖV och NS. Riktningen ÖV kan då svara mot x-axeln och NS mot y-axeln. Koordinaten (2,5) innebär då 2 längdenheter åt Ö och 5 åt N från origo sett, medan $(7,-4)$ är 7 enheter åt Ö och 4 åt S. Fågelavståndet till origo från $(x.y)$ är lika med $\sqrt{x^2+y^2}$ (Pythagoras sats), och fågelavståndet mellan två godtyckliga punkter (x,y) och (a,b) är lika med $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Förutom att ange punkters lägen kan koordinatsystemet användas för att beskriva geometriska figurer med hjälp av matematiska uttryck. Det gör att vi kan ”räkna” analytiskt på geometriska objekt. Om man t.ex. i ett Cartesiskt koordinatsystem ritar in alla punkter (x,y) som uppfyller $x^2+y^2=4$ (några sådan punkter är $(2,0), (-2,0), (0,2), (1,-\sqrt{3})$, men det finns oändligt många) så visar det sig att de tillsammans utgör periferin på en cirkel, med radien lika med 2. På samma sätt utgör de punkter som uppfyller $x^2+9y^2=16$ periferin av en ellips med centrum i origo med längsta axeln i x-led (längd 4) och kortaste i y-led (längd 4/3). De punkter som uppfyller $x^2+9y^2\le 16$ täcker också hela det inre av ellipsen.

De punkter (x,y) som uppfyller ett linjärt samband, $ay+bx+c=0$ (med givna värden på a,b och c) blir en *rät linje*. Om här $a\neq 0$ kan vi skriva om sambandet som det mer välbekanta $y=kx+m$ (med $k=-b/a$ och $m=-c/a$), något som känns igen som ”räta linjens ekvation”. Varje rät linje som inte är parallell med y-axeln kan skrivas på detta sätt. Konstanten k kallas riktningskoefficient (eller lutning) och m helt enkelt ”konstanten” (intercept med ett finare ord). Om värdet på k är positivt, t.ex. $k=3$ växer värdet på y när x växer. Linjen löper från SV upp mot NO. Är k-värdet negativt löper linjen i stället uppifrån NO ner mot SV när x-värdet växer. Konstanten m är lika med y-värdet när vi sätter $x=0$, d.v.s. är lika med avståndet från origo till linjens skärning med y-axeln.

Ett mycket enkelt exempel på en funktion $y=kx+m$, som grafiskt utgör en rät linje, får vi om vi tolkar m som fast kostnad (påsen!) och k som kostnad per enhet och vi inhandlar x enheter. Detta synsätt kan vi använda för att ”ta fram ekvationen för en viss linje”. För att dra en rät linje (på ett papper t.ex.) kan vi använda oss av två punkter. Säg att vi har två sådana punkter $(2,6)$ och $(6,14)$. Jämfört med första punkten har vi ökat x (inköpsmängden) med $6-2=4$ enheter och det har ökat på y med (kostat oss) $14-6=8$ (mer). Ökningen i y per enhet är därför $8/4=2$, d.v.s $k=2$. Linjens ekvation är därför $y=2x+m$, där det återstår att bestämma m. Det kan vi göra genom att ”sätta in” endera punkten, så ger t.ex $(2,6)$ att $6=2\cdot 2+m$, så m råkar också bli lika med 2, och linjens ekvation blev $y=2x+2$. Det går givetvis att på detta sätt att ta fram en allmän formel för den linje som går genom två givna punkter (x_1,y_1) och (x_2,y_2).

Vi har sett att de (x,y) som uppfyller $ax+by+c=0$ utgör en rät linje. Har vi två sådana linjer som inte är parallella så skär de varandra i exakt en punkt. Den punkten uppfyller både $ax+by+c=0$ och $dx+ey+f=0$ (den andra linjen), d.v.s. är lösningen till det linjära ekvationssystemet vi får av de två ekvationerna. På motsvarande sätt kan lösningen till ett ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta ses som skärningspunkten mellan tre plan i en tre-dimensionell rymd.

Andra koordinatsystem

Det finns som sagt andra koordinatsystem än det Cartesiska (i planet, d.v.s. i två dimensioner). Vi har ett Cartesiskt i tre dimensioner (med en höjdaxel till de tidigare två), vi har longitud och latitud på det tvådimensionella klotet. I skogliga sammanhang används ofta cirkulära provytor, med ett ytcentrum och alla träd inom en cirkelskiva med *r* meters radie ska mätas (vanliga *r* är 10, 7, 5, 5.64 meter). Ibland vill man också koordinatsätta träden för att studera deras inbördes positioner (och kanske relatera dessa till diametrarna). Ytcentrum får bli origo i ett lokalt koordinatsystem. Men det blir litet klumpigt att ange varje träds position i ÖV/NS i förhållande till centrum. I stället är det mycket enklare att ange trädets avstånd (centrum av trädet, märgen) till ytcentrum och i vilken vinkel (bäring) trädet står i förhållande till NS-riktningen. Avstånd och riktning räcker för att positionera trädet. Det koordinatsystem som är uppbyggt på det sättet kallas det *polära* .

ÖVN 1. Vi betraktar de fem punkterna med koordinaterna $(-2,1)$, $(1,2)$, $(6,3)$, $(4,-2)$ och $(3,6)$ i ett Cartesiskt system.

a) Om vi står i origo finns det någon av punkterna som syns exakt i linje bakom någon av de andra punkterna? Vilken/vilka i så fall, och vilken/vilka står den/de bakom?

b) Förutom det/de punktpar som du hittar i uppgift a finns ett annat punktpar för vilka den räta sammanbindningslinjen dem emellan passerar genom origo. För vilka punkter gäller detta?

c) Bestäm ekvationen för den räta linjen i uppgift b.

ÖVN 2. Bestäm ekvationen för den räta linjen i följande fall

a) Linjen går genom punkterna (3,2) och (0,8)

b) Linjen går genom punkterna $(-2,-3)$ och $(4,6)$

c) Linjen går genom punkterna $(4,1)$ och $(4,7)$

d) Linjen har riktningskoefficienten -2 och går genom punkten (1,2)

e) Linjen har interceptet lika med -2 och går genom punkten (1,2)

f) * Linjen är parallell med linjen $y = 3x + 4$ och går genom punkten $(-2,3)$

ÖVN 3. Bestäm avståndet mellan följande punktpar

a) $(3,4)$ och origo b) $(-5,-12)$ och origo c) $(8,4)$ och $(12,7)$

ÖVN 4. Försök lösa ekvationssystemet

$$2x - 3y = 8$$
$$-4x + 6y = 10$$

och förklara geometriskt varför det inte går.

ÖVN 5. ** Vilken geometrisk figur bildar de (x, y) som uppfyller $|x| + |y| = 4$?

(Du får rita och gissa)

11. Derivator

Ett par inledande exempel

Många tycker att det här med derivator är något som både är obegripligt och komplicerat. Förmodligen beror det på att man ägnat onödigt mycket kraft åt en massa ”deriveringsregler” i stället för att fundera på vad derivatan egentligen står för. Ibland kan rena ordval få saker att verka mer komplicerade än vad de är. Ordet derivata låter mycket mer komplicerat än ”förändring”, men i princip är det samma sak. Låt oss ta ett exempel:

En cyklist färdas längs en väg och det förekommer backar och annat vilket gör att han inte håller konstant hastighet. Ibland ökas hastigheten (nerförsbackar) och då talar vi om acceleration. Minskar hastigheten (uppför) är accelerationen negativ, vilket brukar kallas retardation. Men vilken är egentligen definitionen av acceleration? Antag att cyklisten håller hastigheten v (m/sek) vid tidpunkten t (det kan givetvis vara svårt att *mäta* hastigheten vid en enda tidpunkt, men det ska inte bekymra oss, *någon* hastighet måste han/hon ha). En stund senare, vid tidpunkten $t+h$ är hastigheten sannolikt en annan. För att kunna uttrycka det här enkelt ser vi hastigheten som en funktion av tiden, så att den vid tiden t skrivs $v(t)$ och alltså något senare är $v(t+h)$. Skillnaden, eller förändringen i hastighet är alltså $v(t+h)-v(t)$. Detta är nu inte accelerationen för den är skillnaden *per tidsenhet*, alltså $\dfrac{v(t+h)-v(t)}{h}$, för det har ju gått h tidsenheter mellan de två tillfällena. Vi är inte riktigt klara än, för om det har gått lång tid (om h är stort) säger inte uttrycket ovan någonting om accelerationen vid tiden t. Cyklisten kan ha ökat och minskat hastigheten många gånger mellan t och $t+h$. För att få veta accelerationen i just tidpunkten t måste vi välja h otroligt litet, det ska bara gå ett litet snäpp mellan de två tidpunkterna. I verkligheten har vi ett svårt mät-problem, men i matematikens värld är det enkelt, vi ”låter h gå mot 0”. Det skrivs $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(t+h)-v(t)}{h}$, men det skrivsättet ska vi inte använda oss av i fortsättningen. Det värde man får när ”h går mot 0” kallas *gränsvärdet*, och den benämningen är bra att lägga på minnet.

En sammanfattning: Vi bildade skillnaden i hastigheten mellan två tidpunkter och dividerade skillnaden med tidsavståndet och beräknade alltså ”skillnaden i hastighet per tidsenhet”. Om tidsavståndet är oändligt litet får vi accelerationen.

Vi mäter hastighet i m/sek så skillnaden i täljaren har enheten m/sek. Enheten i nämnaren är sek, så accelerationen kommer att att enheten m/sek^2 ($\mathrm{m}\cdot\mathrm{sek}^{-2}$).

Notera att om vi försöker sätta in $h=0$ i uttrycket $\dfrac{v(t+h)-v(t)}{h}$ blir det problem. Vi får en nolla både i täljaren och nämnaren. Men om vi ”kryper in” mot $h=0$ så kommer vi faktiskt att få ett värde. Låt oss ta ett konkret exempel. Låt tidpunkten t vara fixerad (i sek). Antag att cyklistens hastighet vid tiden s (sek) kring tiden t är lika med $v(s)=8+0.5\cdot(s-t)-0.08\cdot(s-t)^2$, så att $v(t)=8$ och t.ex. $v(t+1)=8.42$ (1 sekund senare). För ett godtyckligt antal sekunder h senare (eller tidigare) är då hastigheten $v(t+h) = 8 + 0.5h - 0.08 \cdot h^2$. För förändringen per tidsenhet får vi då

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{8+0.5h-0.08h^2-8}{h} = \frac{0.5h-0.08h^2}{h} = \frac{h(0.5-0.08h)}{h} = 0.5 - 0.08h,$$

och *nu* kan vi sätta in $h = 0$ och vi får gränsvärdet 0.5 (m/sek^2) på accelerationen.

En observation är nu ganska självklar. Eftersom gränsvärdet (av förändringen per tidsenhet) är positivt (större än 0) kan vi se att cyklisten *ökar* hastigheten vid tiden *t*. Hade cyklisten minskat hastigheten hade $(v(t+h)-v(t))/h$ varit mindre än 0 (för positiva *h*) och gränsvärdet (accelerationen) hade varit negativt. Hade gränsvärdet blivit exakt lika med 0 hade cyklisten varken ökat eller minskat hastigheten vid tidpunkten *t*.

Låt oss ta ett exempel till. Vi tänker oss en fabrikör som tillverkar en viss produkt. För detta har han kostnader och intäkter, vilka båda kan bero på hur många exemplar av produkten som tillverkas. Antalet exemplar (räknat med enheten 1 styck eller 1000 styck eller så) betecknar vi *q* (för quantity) Antag att kostnaden, i någon monetär enhet (kr eller 1000 kr eller så) att tillverka *q* exemplar är $100 + 15q$, där 100-ingen är en fast kostnad och sedan är styckekostnaden 15. Vi antar vidare att fabrikören är så pass stor på marknaden att den mängd han producerar något påverkar marknadspriset. Låt oss anta att priset, per enhet, på produkten blir $45 - 0.3 \cdot q$ om han tillverkar *q* enheter. För övrigt bortser vi från skatter, kostnader för marknadsföring etc. (eller så är de inkluderade i kostnaderna/intäkterna ovan). Hur många enheter bör fabrikören tillverka?

Låt oss benämna totala intäkten minskad med kostnader ”nettot” och eftersom det beror på (är en funktion av) *q* så betecknar vi det $N(q)$. Vi får av uppgifterna ovan formeln

$$N(q) = q \cdot (45 - 0.3q) - 100 - 15q = 45q - 0.3q^2 - 100 - 15q = -100 + 30q - 0.3q^2$$

Även om variabeln *q* nu kanske i verkligheten bara kan anta heltalsvärden (1, 2, 3, …) så antar vi när vi räknar att alla värden är möjliga.

Ett (matematiskt enkelt men brutalt) sätt att lösa problemet vore att beräkna $N(q)$ för en massa värden på *q* och se efter för vilket värde på *q* som $N(q)$ blir störst. Men låt oss pröva något mindre råbarkat. Antag att fabrikören får för sig att tillverka $q_0 = 40$ enheter. Borde han ha tillverkat något fler? Jo, det borde han ha gjort om nettot blir större om han tillverkar $40 + h$ enheter (för något $h > 0$), d.v.s. om $N(40+h) > N(40)$. Förändringen i nettot per tillverkad enhet blir lika med kvoten $\dfrac{N(40+h)-N(40)}{h}$ som i så fall också är positiv liksom också gränsvärdet av detta när *h* går mot 0. Kvoten säger oss hur stort nettot ökar per ny enhet om han tidigare tillverkat 40 stycken. Låt oss beräkna denna kvot och låta *h* gå mot 0. Vi får

$$\frac{N(40+h)-N(40)}{h} = \frac{-100 + 30(40+h) - 0.3(40+h)^2 - \left(-100 + 30 \cdot 40 - 0.3 \cdot 40^2\right)}{h} =$$

$$= \frac{6h - 0.3h^2}{h} = 6 - 0.3h$$ och gränsvärdet blir 6 när h går mot 0.

Han tjänar alltså (i runda tal) 6 monetära enheter per ytterligare fabricerad enhet om han redan producerat 40 stycken, och borde därför fabricera ytterligare enheter. Han kommer dock att tjäna allt mindre per ytterligare enhet eftersom det pris $(45 - 0.3q)$ han får ut minskar per enhet utan att kostnaden per ytterligare enhet (15) sänks. Vad hade hänt om han redan fabricerat 65 enheter? För $q_0 = 65$ får vi på samma sätt som ovan

$$\frac{N(65+h) - N(65)}{h} = \frac{-9h - 0.3h^2}{h} = -9 - 0.3h$$ med gränsvärdet -9 när h går mot 0.

Nu skulle han förlora 9 monetära enheter per ytterligare tillverkad enhet så han har förmodligen redan tillverkat för många.

Vi kan nu dra den slutsatsen att så länge han tjänar på en ytterligare enhet bör han öka produktionen, men om han förlorar på ytterligare en så bör han minska den. Alltså bör han, för att maximera nettot, sluta när gränsvärdet för kvoten ovan är exakt 0. Låt oss försöka bestämma det q_0 för vilket detta inträffar. På samma sätt som ovan får vi

$$\frac{N(q_0+h) - N(q_0)}{h} = \frac{-100 + 30(q_0+h) - 0.3(q_0+h)^2 - \left(-100 + 30 \cdot q_0 - 0.3 \cdot q_0^2\right)}{h} =$$

$$= \frac{30h - 0.6q_0h - 0.3h^2}{h} = \frac{h(30 - 0.6q_0 - 0.3h)}{h} = 30 - 0.6q_0 - 0.3h$$ som går mot $30 - 0.6q_0$ när h går mot 0.

Vi ser att gränsvärdet blir 0 när $30 - 0.6q_0 = 0$, d.v.s. när $q_0 = 30/0.6 = 50$, vilket alltså är det antal som fabrikören bör välja. Hans netto blir då $N(50) = 650$

Vi har i exemplen ovan bildat samma sorts förändringskvot,

i cyklistfallet $\dfrac{\text{Förändring i hastighet}}{\text{Förändring i tid}}$ och i fabrikörfallet $\dfrac{\text{Förändring i netto}}{\text{Förändring i antal}}$

där vi i cyklistfallet hade hastigheten som en funktion av tiden och i fabrikörfallet hade nettot som en funktion av antalet. Vi lät i bägge fallen förändringen i nämnaren gå mot 0, men vi utnyttjade resultatet för litet olika sorters slutsatser.

Vi kan se på kalkylerna på ett annat sätt också. Låt oss beteckna gränsvärdet i cyklistfallet med a (för acceleration). För små tidsförändringar har vi då ungefär

$$\text{Förändring i hastighet} \approx a \cdot \text{Förändring i tid}$$

På samma sätt får vi med gränsvärdet m ("på marginalen") i fabrikörfallet

$$\text{Förändring i netto} \approx m \cdot \text{Förändring i antal}$$

Detta innebär att gränsvärdena säger hur mycket en förändring i tid resp i antal "skalas upp eller ner" när det gäller motsvarande förändring i hastighet resp. i netto.

Är gränsvärdena stora så påverkar en förändring i tid/antal hastighet/netto mycket, men är gränsvärdena små händer inte mycket med hastighet/netto. (Notera att *a* och *m* ovan också varierar med tid och antal, men att detta av tydlighetsskäl inte betecknats)

ÖVN 1. Antag att cyklisten under viss tid cyklar med konstant hastighet. Hur stort blir då gränsvärdet under den tiden?

ÖVN 2. Hur stort är gränsvärdet i fabrikörfallet när $q = 0$?

Generellt

Vi betraktar en funktion $y = f(x)$

Vi vill studera hur mycket en (liten) förändring i x förändrar värdet på y. Därför bildar vi kvoten (den s.k. *differenskvoten*)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Förändring i } y}{\text{Förändring i } x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(där Δx är detsamma som vårt gamla h, men Δ-beteckningarna är mycket vanliga varför de används nedan)

Vi låter sedan förändringen Δx i x gå mot 0 för att få ett gränsvärde.

Detta gränsvärde kallas *derivatan* av funktionen f för värdet x. Derivatan av funktionen f betecknas f' (utläses ”f prim”)

Derivatan kan också skrivas $\dfrac{dy}{dx}$ eller $\dfrac{df}{dx}$.

Anm. 1. Vi har ovan i exemplen beräknat derivatan för vissa fixerade x-värden. Man kan ofta bestämma den generellt, för vilket x om helst, varför derivatan kan skrivas som en funktion $f'(x)$. Vill man veta derivatan värdet för ett visst värde, t.ex. $x = 17$ sätter man in $x = 17$ och erhåller alltså värdet $f'(17)$.

Anm. 2. Det är inte säkert att gränsvärdet existerar. Alla funktioner är (inte överallt) *deriverbara*. Vi diskuterar dock inte detta mer här.

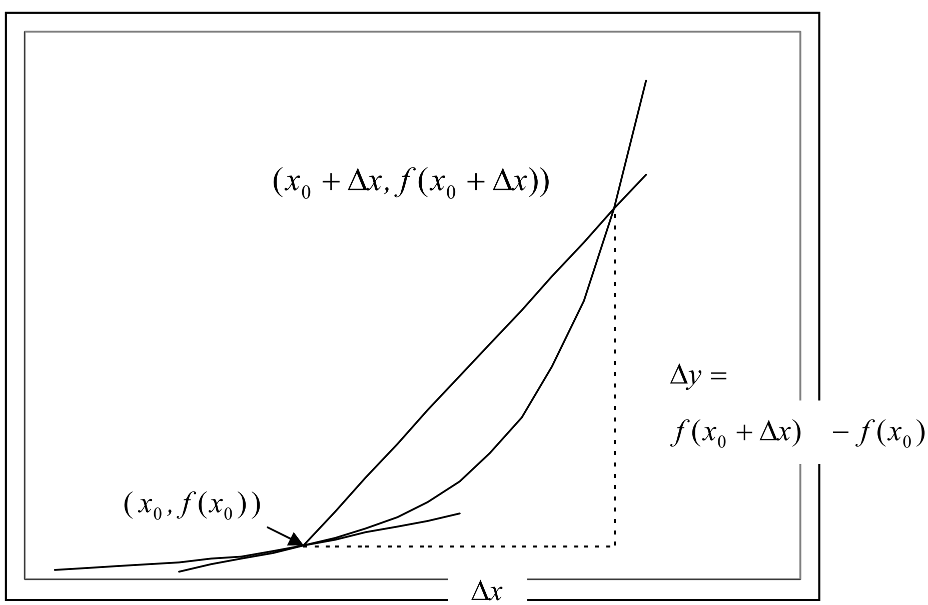
ÖVN 3. * Betrakta funktionen $y = 3x^2$. Bestäm derivatan i $x = 1$ genom att ställa upp differenskvoten och låta nämnaren gå mot 0.

Grafisk framställning

Det ovanstående kan belysas grafiskt, se nedanstående figur. Grafen av funktionen $y = f(x)$ är kurvan (punkterna på kurvan utgörs av de (x, y) för vilka $y = f(x)$). Vi fixerar sedan en punkt (x_0, y_0) på kurvan, där $y_0 = f(x_0)$. Vi ska bestämma derivatan i den punkten. Vi tar då en godtycklig differens Δx från x_0 och hamnar i ett likaledes godtyckligt *x* (avståndet från x_0 är lika med längden av den horisontella streckade linjen). Vi ska beräkna differenskvoten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, så vi behöver funktionsvärdet $f(x_0 + \Delta x)$, vilket ges av funktionens värde för $x = x_0 + \Delta x$. Förändringen Δy i *y* svarar alltså mot längden av den vertikala streckade linjen och vi har $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$. Differenskvoten är alltså lika med kvoten mellan (de teckenförsedda) längderna av de två streckade linjerna (hade kurvan pekat nedåt i stället för uppåt hade Δy blivit negativt). En smula eftertanke visar att denna kvot är lika med *k*-värdet för den inritade räta linje (sekanten) som går genom de två punkterna (x_0, y_0) (den fixa) och $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (den godtyckliga). Om vi nu låter Δx bli allt mindre så kommer den räta linjen (i figuren) att få ett allt mindre *k*-värde, men det kommer att landa i *k*-värdet för den räta linje som enbart går genom punkten (x_0, y_0). Denna linje tangerar kurvan och kallas därför tangenten. Eftersom gränsvärdet samtidigt är lika med derivatan i $x = x_0$ ser vi att

$f'(x_0) = k$ -värdet för tangenten till grafen av *f* för $x = x_0$

Vill vi bestämma tangentens ekvation är alltså k -värdet klart. Sedan får vi *m*-värdet genom att vi vet att den fixa punkten (x_0, y_0) ligger på tangenten.



Figur. Grafisk illustration till derivatan av en funktion

Användningsområden för derivatan

Derivatan av en funktion kan användas till många saker, t.ex.
(a) Optimeringsproblem (fabrikörfallet). När är derivatan lika med 0?
(b) Studier av beteendet hos en funktion. Hur stor är derivatan? Är den positiv så växer funktionen med x, är den negativ så gäller det omvända. (Cyklisten)
(c) Approximation av funktion. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$ om Δx är litet.
(d) Effekt på y av mätfel i x. Om Δx är litet så är $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$
(e) Ekvationslösning. (Newton-Raphson, men det tar vi inte upp här)

Beräkning av derivator

Det vore litet trassligt om man varje gång en derivata ska beräknas vore tvungen att ställa upp differenskvoten och bestämma gränsvärdet (vilket inte alltid är så lätt som i de fall vi betraktat). Lyckligtvis finns det folk som för en stor mängd olika funktioner bestämt derivatan och lika lyckligtvis finns det räkneregler för hur sådana kända derivator används i skiftande fall. Vi börjar med att lista derivatorna till de elementära funktionerna.

Derivatan av funktionen x^a är $a \cdot x^{a-1}$

Derivatan av funktionen $\sin(x)$ är $\cos(x)$, nota bene om *vinkeln räknas i radianer*
Derivatan av funktionen $\cos(x)$ är $-\sin(x)$, nota bene om *vinkeln räknas i radianer*

Derivatan av funktionen $\ln(x)$ är $1/x$

Derivatan av funktionen e^x är e^x

Lägg märke till hur ”trevliga” derivatorna av $\ln(x)$ och e^x blir. Med andra ”baser” blir derivatorna ”fulare”. Derivatan av ${}^{c}\log(x)$ (logaritm med basen c) är $\frac{1}{\ln(c)} \cdot \frac{1}{x}$ och derivatan av c^x är $c^x \cdot \ln(c)$. Man kan gott säga att detta räcker som motiv till att använda basen e i stället för något annat.

De två enkla deriveringsreglerna

1. Derivatan av $c \cdot f(x)$ är lika med $c \cdot f'(x)$
(Multiplikation med konstant ger inga problem)

2. Derivatan av $f(x) + g(x)$ är lika med $f'(x) + g'(x)$
(Addition/subtraktion av funktioner ger inga problem)

Reglerna tillsammans ger att derivatan av $c \cdot f(x) + d \cdot g(x)$ är $c \cdot f'(x) + d \cdot g'(x)$
Exempel. Derivatan av $3x^2 - 4e^x$ är $3 \cdot (2 \cdot x) - 4 \cdot e^x = 6x - 4e^x$

Exempel. Derivatan av $\sqrt{x}$? Jo, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, så derivatan är $(1/2)\cdot x^{(1/2-1)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ÖVN 4. Bestäm derivatan till följande funktioner
a) $5x^4$ b) $3\ln(x)-2$ c) $3\sin(x)+4\cos(x)$ d) $2x^{3/2}-3e^x+4\ln(x)$

ÖVN 5. Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen $y = 3x^2+4x-2$ för $x = 1$

<u>Två litet knepigare deriveringsregler</u>

3. Derivatan av produkten $f(x)\cdot g(x)$ är $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
(Derivera en i sänder och addera)

4. Derivatan av kvoten $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ är $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
($g^2(x) = g(x)\cdot g(x)$) (Notera minus-tecknet i detta fall)

Exempel. Derivatan av $x^2\cos(x)$ är $2x\cdot\cos(x)+x^2\cdot(-\sin(x)) = 2x\cos(x)-x^2\sin(x)$

Exempel. Derivatan av $\dfrac{3x^2+1}{2x^3+1}$ är $\dfrac{6x\cdot(2x^3+1)-(3x^2+1)\cdot 6x^2}{(2x^3+1)^2} = \dfrac{6x(1-x-x^3)}{(2x^3+1)^2}$

ÖVN 6. Derivera följande funktioner (och förenkla resultatet om det går)
a) $x\ln(x)$ b) $3x^2e^x$ c) $x\sin(x)+\cos(x)$ d) $(2x-x^2)\cdot(x^3-1)$ e) $\ln^2(x)$
f) $\dfrac{x+2}{x^2+1}$ g) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ h) $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

<u>Och så den kanske värsta, den för s.k. sammansatta funktioner (med ”inre derivata”)</u>

En sammansatt funktion *h* kan skrivas $h(x) = f(g(x))$ där *f* och *g* är funktioner. Det här innebär att vi ”börjar” med *x*, beräknar sedan $u = g(x)$ och sätter sedan in detta i *f*, d.v.s. beräknar $f(u)$. En sådan funktion är t.ex. $\sqrt{1+x^2}$, med $g(x) = 1+x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$. Det går givetvis att sätta samman i fler led än två, ett sådant exempel är $e^{\sqrt{1+x^2}}$, som är sammansatt av $1+x^2$, $\sqrt{x}$ och e^x ”inifrån och ut”. Frågan är nu hur man deriverar sammansatta funktioner. Regeln är

5. Derivatan av funktionen $h(x) = f(g(x))$ är $f'(g(x))\cdot g'(x)$
(Man deriverar *f* och ”sätter in” oförändrad $g(x)$ i uttrycket och multiplicerar

resultatet med derivatan av g)
Om man har fler led: Derivatan av $f(g(h(x)))$ är $f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$
(Varje funktion deriveras och sedan multiplicerar man ihop)

Egentligen är det inte så konstigt som det kan se ut. En liten förändring Δx i x ger upphov till en (liten?) förändring $\Delta u \approx g'(x)\Delta x$ i $g(x)$. Nu är Δu en liten förändring av u som ger upphov till en förändring $\Delta y \approx f'(u)\Delta u$ när vi "beräknar" $y = f(u)$. Sätter vi ihop det här får vi $\Delta y \approx f'(u)\Delta u \approx f'(u)\cdot g'(x)\Delta x = f'(g(x))\cdot g'(x)\cdot \Delta x$.

Exempel. Låt oss ta exemplet $e^{\sqrt{1+x^2}}$. Den "yttersta" funktionen är e^x och dess derivata är e^x, varför första faktorn i produkten blir $e^{\sqrt{1+x^2}}$. Näst ytterst är $\sqrt{x}$ med derivatan $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (se tidigare exempel), så andra faktorn blir $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$. Det sista ledet är $1+x^2$, med derivatan 2x. Således blir derivatan av den givna funktionen lika med $e^{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\sqrt{1+x^2}}$ (vilket kanske är det mest estetiska sättet att skriva resultatet på).

Exempel (litet lättare, och av vanligare slag). Vi tar funktionen $\sin(-6x)$. Den är också sammansatt, av $f(x)=\sin(x)$ och $g(x)=-6x$. Eftersom $f'(x)=\cos(x)$ och $g'(x)=-6$ får vi att derivatan av $\sin(-6x)$ är $-6\cdot\cos(-6x)$. I detta fall känns faktorn $g'(x)$ enklare än ovan igen som s.k. "inre derivata".

ÖVN 7. Bestäm derivatan till följande funktioner
a) $\ln(1+3x^2)$ b) $e^{-x^2/2}$ c) $\sqrt{1+\cos(x)}$ d) $(1+x/2+x^2/4)^{3/2}$

Några blandade övningar:

ÖVN 8. * Bestäm derivatan till följande funktioner
a) $x\cdot\ln(1+3x^2)$ b) $(1-2x+4x^2)\cdot e^{-x^2}$ c) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

<u>Om lokala max och min. Andraderivatan och högre</u>

När vi bestämde det optimala antalet för fabrikören att tillverka gjorde vi faktiskt det genom att se efter när derivatan $N'(q)$ var lika med 0. Den metoden kan användas allmänt. Om vi tänker oss grafen av en funktion ("kurvan", som i figuren ovan) och funktionen har vissa lokala max eller min, så ser vi maximumen som "kullar" och minimumen som "gropar". Precis i maxvärden och minvärden går tangenten parallellt med x-axeln så k-värdet för tangenten är lika med 0 och k-värdet för tangenten i en punkt är lika med derivatan där.

För att ta reda på var det kan finnas lokala max eller min tar vi alltså reda på för vilka x som $f'(x)=0$. Det måste alltså gälla att $f'(x)=0$ för att det ska vara ett lokalt max eller min.

Men det är inte säkert att alla sådana x som satisfierar $f'(x) = 0$ (x kallas då *nollställe*) verkligen ger max eller min. Så har t.ex. funktionen $y = x^3$ derivatan $3x^2$ som är lika med 0 för $x = 0$, men funktionen har inget max eller min där (funktionen är ständigt växande). För att det ska röra sig om ett max (”kulle”) så måste det, om vi passerar kullen med växande x (från vänster till höger), först gå uppåt och sedan nedåt. När det går uppåt (funktionen) är funktionens derivata positiv men när det sedan går nedåt är derivatan negativ. Om alltså derivatan visar följande teckenväxlingen $+\ 0\ -$ är vi ”passerar” ett nollställe till $f'(x)$ rör det sig om ett maximum. Denna teckenväxling visar också att *derivatan* själv *avtar* i ett maximum. Om vi därför deriverar *derivatan* så ska den vara negativ om det är ett max. Derivatan av derivatan kallas andra-derivatan och skrivs t.ex. $f''(x)$ (utläses ”f biss”). På samma sätt har vi att göra med ett minimum endast om derivatan uppvisar teckenväxlingen $-\ 0\ +$ eller, ekvivalent, om $f''(x) > 0$ i nollstället.

För funktionen $f(x) = x^3$ med derivatan $f'(x) = 3x^2$ får vi kring $x = 0$ teckenföljden $+\ 0\ +$ för derivatan, alltså ingen *växling*, så det kan inte röra sig om max eller min. Andraderivatan är $6x$, med värdet 0 för $x = 0$ och det räcker inte för att avgöra naturen (max/min/ej) hos det funna nollstället.

En funktion kan ha många lokala max och min så för att hitta eventuella globala max och min får vi undersöka funktiosvärdena. Vi måste också undersöka funktions-värdena i eventuella ”ändar” och i punkter där derivatan inte existerar.

Sammanfattning: För att ett värde $x = x_0$ ska ge ett lokalt max eller min ska det gälla att $f'(x_0) = 0$.
Det rör sig om ett lokalt maximum om $f''(x_0) < 0$ eller om $f'(x)$ har teckenväxlingen $+\ 0\ -$ kring $x = x_0$
Det rör sig om ett lokalt minimum om $f''(x_0) > 0$ eller om $f'(x)$ har teckenväxlingen $-\ 0\ +$ kring $x = x_0$
Om $f'(x)$ inte växlar tecken kring $x = x_0$ rör det sig varken om max eller min.
Om $f''(x_0) = 0$ får vi undersöka saken ytterligare (kolla teckenväxling).

Exempel. Funktionen $f(x) = x^3 e^{-4x}$ har derivatan $f'(x) = 3x^2 e^{-4x} - 12x^3 e^{-4x} =$
$= 3x^2 e^{-4x}(1 - 4x)$. Funktionen e^x är alltid positiv så derivatan har ”bara” två nollställen, $x = 0$ och $x = 1/4$.
Kring $x = 0$ är derivatan positiv både till vänster och höger, så $x = 0$ ger varken max eller min.
Kring $x = 1/4$ är $f'(x)$ positiv (strax) till vänster ($3x^2 > 0,\ e^{-4x} > 0$ och $1 - 4x > 0$) och negativ (strax) till höger ($3x^2 > 0,\ e^{-4x} > 0$ och $1 - 4x < 0$) så $x = 1/4$ är en max-punkt.

Vi kan (med viss möda kanske) räkna ut andraderivatan. Den är (efter förenkling) $f''(x) = 6xe^{-4x}(1-8x+8x^2)$, vilket ger $f''(1/4) = -3e^{-1}/4 < 0$ och således max. För $x = 0$ får vi $f''(0) = 0$.

ÖVN. 9. För en funktion *f* är derivatan lika med $f'(x) = (x-1)(x-2)$. Undersök funktionen med avseende på lokala max eller min.

ÖVN. 10. Undersök följande funktioner med avseende på lokala max eller min:

a) $f(x) = 5 - 6x + 2x^2$ b) $f(x) = 1 + x^4/4$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 8$ d) * $f(x) = \dfrac{x - 3/2}{(1+x)^2}$

Derivering av flervariabla funktioner (** ?)

I avsnittet om funktioner (9:an) har vi berört funktioner *f* med fler än ett argument. Även sådana funktioner kan deriveras och derivatan kan användas till minst lika många sorters analyser som de som nämnts ovan. För att i korthet beskriva derivering av sådana funktioner låt oss nöja oss med en funktion av två variabler som vi betecknar $z = f(x, y)$, så att variabeln (värdet av) z beror på två argument (variabler) *x* och *y*. En sådan funktion *f* kan t.ex. vara given genom $z = 2x^3y + 3xy^3 - 6x$. Det kan vara bra att ha en grafisk bild av en sådan funktion. Vi skulle då behöva använda ett Cartesiskt system med tre axlar, där *x* och *y* bildar ett vågrätt plan och *z* (”höjden”) går vinkelrätt mot planet. Man kan då inse att punkterna (x, y, z) bildar en yta i denna rymd. En sådan yta känner vi igen från ytan av vår vanliga jord, med kullar och dalar etc. På samma sätt som vi för jorden använder kartor med höjdkurvor kan vi faktiskt också åskådliggöra en funktion $z = f(x, y)$ med en ”karta” i stället för en graf i tre dimensioner. Höjdkurvorna (kallas nivåkurvorna) i den bilden binder samman (x, y)-punkter som ger samma värde på *z*.

Så till derivering. Vi kan tänka oss att *x*-axeln går i ÖV riktning och *y*-axeln i NS i vår ”karta”. Vi kan sedan betrakta förändringen av funktionen per (oändligt liten) förändring i variablerna *x* och *y var för sig*. Alltså rör vi oss ”först” bara i ÖV riktning och får *derivatan med avseende på x* och ”sedan” i NS riktning och får *derivatan med avseende på y*. Vi kan naturligtvis från en viss punkt (x_0, y_0) röra oss i vilken riktning som helst, och betrakta förändringen av z i just den riktningen, men det visar sig att det räcker att bestämma förändringarna i de två axelriktningarna för att kunna bestämma förändringen i vilken riktning som helst (detta då bortsett från vissa ”sjukliga” fall). Förändring per oändligt liten steglängd ger derivatorna.

Derivatan längs *x*-axeln betecknas $f_1'(x, y)$ eller $f_x'(x, y)$ eller $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ eller $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ och vi får fram den genom att helt enkelt derivera funktionen med avseende på *x* samtidigt som vi betraktar *y som vilken konstant som helst*. I exempelfunktionen ovan får vi därför $f_1'(x, y) = 6x^2y + 3y^3 - 6$. Derivatan längs *y*-axeln betecknas analogt men nu är det *x* som är konstant. Vi får därför $f_2'(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 = x(2x^2 + 9y^2)$.

Som tillämpning tar vi nu upp något om lokala max och min för tvåvariabla (eller flervariabla) funktioner. Det är då klart att en lokal ”kulle”, d.v.s ett maximum, utgör en topp från vilket håll som helst, speciellt i ÖV och NS. Därför är *både* $f_1'(x,y)$ och $f_2'(x,y)$ lika med 0 i ett lokalt maximum. Samma sak gäller för en lokal ”grop”, d.v.s ett minimum. Även där gäller att *både* $f_1'(x,y)$ och $f_2'(x,y)$ är lika med 0. Med andra ord: En punkt (x_0, y_0) är ett lokalt maximum eller minimum endast om

$$f_1'(x_0, y_0) = 0 \quad \text{och} \quad f_2'(x_0, y_0) = 0$$

Det är nu (liksom i fallet med *ett* argument) inte säkert att (x_0, y_0) ger max elle min bara för att ovanstående gäller. Det kan röra sig om en s.k. sadelpunkt. I sätet på en sadel har vi en minpunkt om vi rör oss *längs* hästen och en maxpunkt om vi rör oss *tvärs* hästen. Bägge derivatorna är lika med 0. För att (förhoppningsvis) avgöra om det är en max-eller minpunkt kan vi ta till andraderivatorna, och det finns fyra stycken varav dock två (nästan alltid) är lika. Vi kan derivera $f_1'(x,y)$ en gång till med avseende på *x* (längs *x*-axeln) för att få $f_{11}''(x,y)$ eller med avseende på *y* (längs *y*-axeln) för att få $f_{12}''(x,y)$ (se skillnaden i index). Vi kan på motsvarande sätt derivera $f_2'(x,y)$ längs *y*, vilket ger $f_{22}''(x,y)$ eller längs *x*, med $f_{21}''(x,y)$ som resultat. Nu gäller dock att $f_{12}''(x,y) = f_{21}''(x,y)$ så bara tre derivator behöver beräknas.
För avgörandet (om max eller min) beräknas värdet av en storhet *D*, som är

$$D = f_{11}''(x_0, y_0) \cdot f_{22}''(x_0, y_0) - \left(f_{12}''(x_0, y_0)\right)^2$$

och det gäller att

om $D < 0$ så är (x_0, y_0) en sadelpunkt
om $D > 0$ och $f_{11}''(x_0, y_0) > 0$ så är det en minpunkt
om $D > 0$ och $f_{11}''(x_0, y_0) < 0$ så är det en maxpunkt
om $D = 0$ så får vi undersöka saken närmare (på annat sätt)

Låt oss pröva det här på vårt exempel ovan. För att (x_0, y_0) ska vara max eller min måste (x_0, y_0) satisfiera systemet

$$6x^2 y + 3y^3 - 6 = 0$$
$$x(2x^2 + 9y^2) = 0$$

Systemet är inte linjärt och kan vara litet knepigt att lösa. Men eftersom $2x^2 + 9y^2 = 0$ endast om $x = y = 0$ kan den andra ekvationen uppfyllas antingen av detta eller om $x = 0$, d.v.s i vilket fall måste det gälla att $x = 0$. Sätter vi in $x = 0$ i den första ekvationen ser vi att systemet är satisfierat endast om dessutom $y = 2^{1/3}$. Alltså är $(x_0, y_0) = (0, 2^{1/3})$ enda möjliga max eller min. För ett avgörande krävs andra-derivatorna. Vi får $f_{11}''(x,y) = 12xy$, $f_{12}''(x,y) = 6x^2 + 9y^2$ och $f_{22}''(x,y) = 18xy$. Sätter vi nu in $(x_0, y_0) = (0, 2^{1/3})$ får vi $D = 0 \cdot 0 - \left(9 \cdot 2^{2/3}\right)^2 < 0$, så vårt funna nollställe visade sig vara en sadelpunkt.

ÖVN. 11. ** Undersök funktionen $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 10x - 19y + 10$ med avseende på lokala max och min.

12. Summasymbolen

Inom matematiken och dess tillämpningar används symboler som *x*, *y*, *a*, *p* etc. flitigt. Den stora fördelen med detta är att man kan ta fram generella resultat (”formler”) som man kan tillämpa i det enskilda fallet genom att ”stoppa in” aktuella värden.

En summa av två tal kan skrivas t.ex. $x + y$ eller $a + b$. En summa av tre tal kan på samma sätt skrivas $x + y + z$. Men det är opraktiskt att skriva en summa av säg 23 tal genom att använda 23 olika bokstäver (symboler). Inte sällan vill vi också kunna betrakta en summa generellt, utan att behöva specificera antalet termer. För att hantera detta inför vi symboler med *index*. Vi kan då beteckna 23 tal med $x_1, x_2, x_3, ..., x_{23}$ (tre punkter brukar användas för att beteckna ”o.s.v”, men vi avslutar med sista index). En generell mängd tal, till antalet *n*, där *n* är godtyckligt skriver vi $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Om vi nu vill skriva summan av de 23 talen kan vi skriva den som $x_1 + x_2 + ... + x_{23}$ och av de *n* talen som $x_1 + x_2 + ... + x_n$. Men vi kan också (och det är i längden en förenkling) använda stora grekiska sigma (S), Σ. Med

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

menas summan $x_1 + x_2 + ... + x_n$. Till höger om sigmatecknet står talsymbolerna med sina index. Under sigmatecknet står vilket index som är det första i summan (vi behöver inte starta med index $= 1$ även om det är mycket vanligt) och ovanför tecknet står vilket index som är det sista. I ett aktuellt fall ersätts givetvis alla *x* och start- och slutindex.

Exempel. Betrakta talen $2, 15, 9, -8, 2, 0, -7, 1, 5, -9$ i den ordningen och låt de vara aktuella värden på $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ i den ordningen och med $n = 10$. Då är

$$\sum_{i=3}^{6} x_i = 9 - 8 + 2 + 0 = 3$$

ÖVN. 1. Bestäm för talen (talföljden) i exemplet värdet av

a) $\sum_{i=1}^{5} x_i$ b) $\sum_{i=3}^{10} x_i$ c) $\sum_{i=2}^{7} x_i - \sum_{i=4}^{8} x_i$ d) $\sum_{i=1}^{5} x_{2i}$ (notera index här!)

Det finns givetvis räkneregler även för summasymboler. De är inte sensationella och som man ganska lätt förvissar sig om gäller att

$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a \cdot x_i$ (vi kan ”bryta ut” eller ”multiplicera in” gemensam faktor)

$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$ (vi kan kasta om ordningen i ändliga summor)

Inte sällan kan själva talen x_i vara uttryckta som en formel (funktion) där index i är argument. Med t.ex. $x_i = (i+1)/2$ för $i = 1,...,5$ uttrycker vi talen 1, 3/2, 2, 5/2 och 3, så $\sum_{i=1}^{5} (i+1)/2 = 1 + 3/2 + 2 + 5/2 + 3 = 10$. Vi ska notera att summasymbolen här (och så är det oftast) är praktisk som symbol, men den hjälper oss inte att *beräkna* själva summan. För det får vi ta till andra medel.

ÖVN. 2. Beräkna värdet av följande summor

a) $\sum_{i=3}^{6} i$ b) $\sum_{i=2}^{5} 2^i$ c) $\sum_{i=1}^{8} 3 \cdot (2+3i)/4$ d) $\sum_{i=4}^{11} 5$ e) $\sum_{i=1}^{9} |i-5|$

13. Geometriska serien

Med *summan av en serie* menas helt enkelt summan $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ av talföljden $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Man brukar dock ”kräva” att talen x_i är funktioner $f(i)$ (som i övning 2 ovan). Vanligtvis tänker man sig också att antalet termer *n* är oändligt stort. För att summan *S* då ska vara ändlig (ha någon mening) fordras speciella egenskaper hos x_i-na. Vi ska dock inte beröra detta alls.

En speciell serie, den *geometriska*, uppträder dock tidigt i den ekonomiska teorin och det beror på att den tillämpas vid ränteberäkningar.

Antag först att vi sätter in säg 1000 kr och får konstant 4% ränta per år. Vi startar då meed 1000 kr. Vi har då efter ett år, och en ny insättning kapitalet $1000 + 0.04 \cdot 1000 = 1040$ kr. Efter två år har vi $1040 + 0.04 \cdot 1040 = 1081.6$ kr och efter tre år $1081.6 + 0.04 \cdot 1081.6 = 1124.864$ kr o.s.v. Låt oss göra samma beräkning för godtyckligt startkapital som vi betecknar *a* och ränta som vi betecknar 100*r*%. Vi har då efter ett år $a + a \cdot r = a(1+r)$ kronor. Efter två år har vi $a(1+r) + r \cdot a(1+r) = a(1+r)^2$. På samma sätt visar det sig att vi efter tre år har kapitalet $a(1+r)^3$ och efter *n* år har vi uppenbarligen kapitalet $a(1+r)^n$.

Nu antar vi att vi sätter in a kronor *årligen* och undrar hur stort kapital vi då har efter n år.

Om vi säger att vi det n:te året betalar in a så hinner det inte förränta sig, så det bidrar bara med a till kapitalet. Det vi satte in året innan har förräntat sig 1 år så det bidrar enligt ovan (med $n=1$) med $a(1+r)$. Det vi satte in för två år sedan bidrar med $a(1+r)^2$ o.s.v fram och med bidraget vi satte in första gången som förräntat sig i n år och som därför är $a(1+r)^n$. Det totala kapitalet är alltså lika med

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\ldots+a(1+r)^n=\sum_{i=0}^{n}a(1+r)^i=a\sum_{i=0}^{n}(1+r)^i$$

Termerna i denna summa är speciella för kvoten mellan två konsekutiva termer är hela tiden densamma (och lika med $(1+r)$). En sådan serie kallas geometrisk och det går att ta fram ett enkelt uttryck för dess summa, och det ska vi närmast göra.

Man brukar beteckna kvoten med q eller k. Låt oss använda k. I exemplet ovan är alltså $k=1+r$. Seriens summa är

$$S=a+ak+ak^2+ak^3+\ldots+ak^n$$

Vi multiplicerar detta uttryck med k och får

$$S\cdot k=ak+ak^2+ak^3+\ldots+ak^n+ak^{n+1}$$

Om vi subtraherar det första uttrycket från det andra försvinner nästan alla termer. Bara den sista i den andra summan och den första i den första kvarstår och resultatet blir

$$S\cdot k-S=ak^{n+1}-a\text{, hyfsat till } S(k-1)=a(k^{n+1}-1)$$

vilket, om $k\neq 1$, kan skrivas $S=a\cdot\dfrac{k^{n+1}-1}{k-1}=a\cdot\dfrac{1-k^{n+1}}{1-k}$ (den första varianten är trevligast om $k>1$, den andra om $k<1$). Om $|k|<1$ så kommer S att ”närma sig” (konvergera säger man) värdet $S=a/(1-k)$ när n går mot oändligheten.

Om inte ”insättningen” a och räntan r båda är konstanta går det inte att ta fram motsvarande ”snygga” formler. Men givetvis kan vi göra samma typ av beräkningar och på samma sätt.

ÖVN. 1. Hur stort är kapitalet med en insättning om 1000 kr årligen och 4% ränta efter 10 år?

ÖVN. 2. Beräkna a) $\sum_{i=0}^{5}3\cdot 2^i$ b) $\sum_{i=0}^{6}(2/3)^i$ c) $\sum_{i=0}^{\infty}(2/3)$ (n oändligt stor)

FACIT

1. De fyra räknesätten

1. a) 22 b) 2 c) 5 d) 0 e) -12 f) 1.7 g) 0.01 h) 3

2. För $x=0$. (Om vi alltså utvecklar formler måste vi särbehandla fallet $x=0$)

2. Parenteser

1. a) 0.84 b) $23\cdot 1=23$ c) $15.6/4=3.9$

d) $5.4-2.1(13.5+8\cdot(-2))=\ 5.4-2.1\cdot(-2.5)=5.4+5.25=10.65$

e) $2-3\cdot(4+5\cdot\{26-4\cdot 7\})=2-3\cdot(4+5\cdot(-2))=2-3\cdot(-6)=2+18=20$

2. Några exempel, säkert inte alla som går att åstadkomma:

$2\cdot 5+3\cdot(7-4\cdot 6)=-41$	$2\cdot 5+3\cdot(7-4)\cdot 6=64$
$2\cdot(5+3\cdot 7)-4\cdot 6=28$	$2\cdot(5+3)\cdot 7-4\cdot 6=88$
$2\cdot(5+3\cdot 7-4\cdot 6)=4$	$(2\cdot 5+3\cdot 7-4)\cdot 6=162$
$2\cdot(5+3\cdot 7-4)\cdot 6=264$	$2\cdot(5+3)\cdot(7-4\cdot 6)=-272$
$2\cdot(5+3)\cdot(7-4)\cdot 6=288$	$(2\cdot 5+3)\cdot(7-4\cdot 6)=-221$
$2\cdot(5+3\cdot(7-4\cdot 6))=-92$	$2\cdot(5+3\cdot(7-4)\cdot 6)=118$
$((2\cdot 5+3)\cdot 7-4\cdot 6)=67$	$(2\cdot(5+3\cdot 7)-4)\cdot 6=288$

3. Räkning med rationella tal

1. a) $47/30=1\frac{17}{30}$ (MGN=30) ($94/60$ är också rätt, men inte lika ”snyggt”)

b) $77/66=7/6=1\frac{1}{6}$

2. a) 33 b) 6 c) $19/\left(\frac{3\cdot 24}{24}-\frac{17}{24}\right)=19/(57/24)=\frac{19\cdot 24}{57}=\frac{24}{3}=8$

4. Algebraiska beräkningar

1. a) x^2-4y^2 b) $x^2-xy-xz+yx-y^2-yz+zx-zy-z^2=x^2-y^2-z^2-2yz$

c) $-7xy$

2. a) $\frac{bc+ac+ab}{abc}$

b) $\frac{a+b}{a}-\frac{b-a}{b}=\frac{b(a+b)}{ba}-\frac{a(b-a)}{ab}=\frac{b(a+b)-a(b-a)}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}$

(Alt. $\frac{a+b}{a}-\frac{b-a}{b}=1+\frac{b}{a}-\left(1-\frac{a}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}$)

c) $\frac{b^2+a^2-2ab}{a^2b^2}=\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}=\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2$

3. a) $ax(ax-2)$ b) $y^2z^2(y-z+2)$ c) $ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=$

$=(c+d)(a+b)$ d) $(y^2z^2+1)(y-z+2)$ (gör som i c))

4. $z=\frac{x-ay}{y}=\frac{x}{y}-a$

Multiplicera uttrycket (eller gör liknämnigt) med $(a+z)$. Vi får då

$$y(a+z)=\frac{(a+z)\cdot x}{(a+z)} \Rightarrow ay+yz=x \Rightarrow yz=x-ay \Rightarrow z=\frac{x-ay}{y}$$

5. $a=\dfrac{4-x^2-bx}{x+b}$ (det är inte alltid x som ska lösas ut)

6. axy/b

7. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Vi kan ta fram den ”rekursivt”: $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^2=(a+b)\cdot(a^2+b^2+2ab)$

Utför sedan multiplikationen och ”hyfsa” så får vi resultatet.

8. Vi måste välja $x=-b$ om det inte är så att $a=b$ för då kan vi välja vilket x som helst. (En produkt är lika med 0 om och endast om minst en av faktorerna är lika med 0)

9. Om $a\neq b$ så är lösningen $x=-b+\dfrac{1}{a-b}$ (Tecknet $\neq$ betyder ”ej lika med”)

Om $a=b$ finns ingen lösning (ekvationen är orimlig redan från början)

Om $a\neq b$ så löser vi enklast ekvationen genom att först dividera bägge leden med $(a-b)$ vilket ger $b+x=1/(a-b)$, varefter vi flyttar över b tll högerledet.

10. Två lösningar finns, $x_1=2$ och $x_2=-7$. Vi får fram dem på det klassiska viset:

$$x_{1,2}=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+14}=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=-\frac{5}{2}\pm\frac{9}{2}$$

(Andragradsekvationer förekommer rätt sällan i verkliga livet)

11. $a=1$ och $b=-56$.

Det här kan vi få fram på (minst) två sätt. Det första är det elegantare och bygger på något som kallas faktoriseringssatsen. Den säger att om en ekvation $x^2+ax+b=0$ har rötterna x_1 och x_2 så är ekvationen identisk med $(x-x_1)(x-x_2)=0$. (Detta har samband med vad som sagts i övning 8 att en produkt är lika med 0 om och endast minst en av faktorerna är lika med 0.) Om vi nu utvecklar $(x-x_1)(x-x_2)=0$ så får vi resultatet $x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2=0$. Detta innebär att $a=-(x_1+x_2)$ och $b=x_1x_2$.

Det andra sättet är att sätta in först $x_1=-8$ och sedan $x_2=7$. Vi får då $(-8)^2-8a+b=0$ respektive $7^2+7a+b=0$. Detta ger ett linjärt ekvationssystem som vi kan lösa (se avsnitt 8).

12. Faktoriseringssatsen gäller för alla gradtal. Ekvationen måste därför vara $(x-2)(x-2)(x-(-3))(x-(-1))=0$, d.v.s. $(x-2)(x-2)(x+3)(x+1)=0$

Utvecklar vi produkten får vi ekvationen $x^4-9x^2+4x+12=0$.

5. Allmänna exponenter

1. a) 4 b) 2 ty $16^{1/4}=(16^{1/2})^{1/2}$ c) $1/2$ d) 4 e) 16 ty $64^{2/3}=(64^{1/3})^2$

f) $9^{2.5}=9^2\cdot 9^{0.5}=81\cdot 3=243$ g) 2 ty $2^{1/4}\cdot 8^{1/4}=(2\cdot 8)^{1/4}$ h) 4

i) $3^{0.7}\cdot 6^{-1.4}\cdot 9^{0.35}\cdot 4^{0.7}=3^{0.7}\cdot 2^{-1.4}\cdot 3^{-1.4}\cdot (3^2)^{0.35}\cdot (2^2)^{0.7}=3^{0.7-1.4+0.7}\cdot 2^{-1.4+1.4}=$

$=3^0\cdot 2^0=1$

2. a) 1.0992… b) 2.7282… c) 4.1483… d) 8.9562… (ej avrundade värden)

6. Absolutbelopp

1. a) För $x = 4$ och för $x = 12$ b) För $x = -16$ och för $x = -6$ c) För inga x (absolutbeloppet är aldrig negativt) d) För $x = 8$ (samma avstånd till värdena 6 och 10 innebär mittemellan dessa).

7. Olikheter

1. a) F(alsk) b) S(ann) c) S d) F e) S f) S g) F h) I och för sig Sann, men man brukar aldrig skriva dubbla olikhetstecken åt olika håll. Säg hellre att $2 < 5$ och samtidigt $3 \le 5$.

2. Största värde är 24 för $x = 3$ och minsta är 3 för $x = 0$. Eftersom $y = (x+2)^2 - 1$ så växer y med kvadraten på avståndet från $x = -2$.

3. $x < 5/4$

MGN$=15$. Multiplicera med 15 och förkorta. Detta ger

$3(2-3x) + 5(x-7) > 11 + 12x - 15 \cdot 4$, vilket förenklas till $-4x - 29 > 12x - 49$

Överflyttningar och en slutlig division ger resultatet.

4. $-2 \le x \le 3$

Olikheten kan skrivas (lös andragradsekvationen!) $(x-3)(x+2) \le 0$ Dela upp i fall.

A. $x > 3$. Dividera med $x - 3$. Vi får $x + 2 \le 0$, d.v.s. $x \le -2$. Det finns inga x som uppfyller både $x > 3$ och $x \le -2$.

B. $x < 3$. Dividera med $x - 3$ och kasta om olikhetstecknet. Vi får $x + 2 \ge 0$, d.v.s $x \ge -2$. De x-värden som ligger i intervallet $-2 \le x < 3$ uppfyller olikheten.

C. $x = 3$. För $x = 3$ blir vänstra sidan 0 som är högst lika med 0, så olikheten är uppfylld även för $x = 3$.

5. a) $2 < x < 6$ b) Dels $x \ge 8$, dels $x \le 2$ c) Dels $x \ge 1$, dels $x \le -7$
d) Dels $-1 \le x \le 1$, dels $3 \le x \le 5$

6. a) $|x-3| \le 1$ b) $|x-4| > 2$

7. a) F(alsk), ty $(-6)^2 > (-5)^2$, men $-5 > -6$ b) F, ty $5 \cdot (-1) > 6 \cdot (-1)$, men $5 < 6$
c) F, ty $-5 > -6$, men $(-5)^2 < (-6)^2$ d) Sann. Eftersom a och b båda är positiva är drras produkt ab det. Vi kan därför dividera alla termerna i $a > b > 0$ med ab utan att behöva kasta om några tecken. Resultatet av divisionen är lika med den andra olikheten. e) Sann. Om $a > b$ så är först $a + d > b + d$. Vidare är ju $c > d$ så $a + c > a + d$. Vi har alltså $a + c > a + d > b + d$, så speciellt är $a + c > b + d$.

8. Linjära ekvationssystem

1. a) $x = 3 \quad y = 1$ b) $x = 1 \quad y = -3$ c) $x = 4 \quad y = 3$

2. a) $x = 1 \quad y = 1 \quad z = 2$ b) $x = 10 \quad y = -3 \quad z = 4$ c) $x = 3 \quad y = 1 \quad z = -4$

3. $x = 176/18 + 7y/18 - 17z/18 \quad w = -20/18 - 19y/18 + 5z/18$

9. Funktioner

1. a) 17/5 ($=3.4$) b) 0 c) $\dfrac{a+15}{a^2+1}$ d) $\dfrac{1/x+15}{(1/x)^2+1} = \dfrac{15x^2+x}{x^2+1}$

2. a) -3 b) 2 c) $3a - 21a^6 + 2$ d) -2

(Byt ut (x, y, z) mot aktuella triplar och sätta in. T.ex för $(x,-x,0)$ sätts $x = x$, $y = -x$ och $z = 0$ i ”formeln” för funktionen)

3. 18
Vi har $h(1,2) = f(1) \cdot g(2)/5 + 3 \cdot 1$. Här är $f(1) = 1 + 3 + 1 = 5$ och $g(2) = 5 + 20/2 = 15$, så $h(1,2) = 5 \cdot 15/5 + 3 = 18$

4. Funktionen är $x = y/4 - 3/4$. Vi kan lösa ut *x* i *y* och det finns bara en lösning. Alltså är *x* en funktion av *y*.

5. a) 0.601815… b) – 0.85137… c) 4.812184… d) 3.218875… ($= \ln(25)$)
e) 5.036952… ($= \ln(11) + \ln(14)$) f) $-0.241162...$ ($= \ln(11) - \ln(14)$)
g) 2.302585… (se upp med parenteser!) h) 4.891741… i) 54.0959… grader (0.94415… radianer) j) $x = -0.360252...(= \ln(8.37/12)$ k) $x = 61.835597...$
$e^{4.52} - 30$ för $e^{\ln(t)} = t$ så $e^{\ln(x+30)} = e^{4.52}$, vilket medför att $x + 30 = e^{4.52}$.
Hit hör också att exponentialfunktionen är ständigt växande så $e^a = e^b$ medför att $a = b$.

10. Koordinatsystem. Räta linjens ekvation

1. a) $(3,6)$ står bakom $(1,2)$ b) $(-2,1)$ och $(4,-2)$ c) $y = -\frac{1}{2}x$

2. a) $y = -2x + 8$ b) $y = \frac{3}{2}x$ c) $x = 4$ (Det ser ut som om *k*-värdet blir oändligt stort och det innebär att linjen är parallell med *y*-axeln. Sådana linjer har ekvationen $x = x_0$ och här är $x_0 = 4$) d) $y = -2x + 4$ e) $y = 4x - 2$ (Interceptet är *m*)
f) $y = 3x + 9$ (Parallella linjer kännetecknas av att de har samma *k*-värden)

3. a) 5 b) 13 c) 5

4. Ekvationerna svarar geometriskt mot två parallella linjer.
Multipliceras första ekvationen med 2 och adderas till den andra får vi resultatet $0 = 26$, vilket uppenbarligen är orimligt (lösning saknas).

5. En ”snedställd” kub (”diamant”) med sidolängden $4\sqrt{2}$
(Kuben är vriden 45 grader jämfört med *x*- och *y*-axlarna)

11. Derivator

1. Gränsvärdet är lika med 0. Täljaren $v(t+h) - v(t)$ är ju 0 för varje fixt *t* och variabelt *h* så länge både *t* och $t + h$ båda befinner sig i det aktuella tidsintervallet.

2. 30.
Vi får $\frac{N(h) - N(0)}{h} = \frac{30h - 0.3h^2}{h} = \frac{h(30 - 0.3h)}{h} = 30 - 0.3h$ som går mot 30

3. 6
Vi får $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(1 + \Delta x)^2 - 3 \cdot 1^2}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + 3\Delta x$ som går mot 6 när Δx går mot 0.

4. a) $20x^3$ b) $3/x$ (derivatan av 2 är lika med 0, 2:an förändras ju ej när *x* gör det)
c) $3\cos(x) - 4\sin(x)$ d) $2 \cdot \frac{3}{2}x^{3/2-1} - 3e^x + 4/x = 3\sqrt{x} - 3e^x + 4/x$

5. Tangentens ekvation är $y = 10x - 5$
Vi deriverar först funktionen $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ och får $f'(x) = 6x + 4$
För $x = 1$ (den givna punkten) får vi $f'(1) = 10$, och detta är tangentens *k*-värde.
Tangentens ekvation är alltså $y = 10x + m$, och det återstår att bestämma *m*.

Tangenten går genom punkten $x = 1$ och $y = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 5$. Alltså är $5 = 10 \cdot 1 + m$, d.v.s. $m = -5$

6. a) $\ln(x) + x \cdot (1/x) = 1 + \ln(x)$ b) $3 \cdot 2x \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x = 3xe^x(2 + x)$

c) $1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) - \sin(x) = x\cos(x)$ d) $(2 - 2x)(x^3 - 1) + (2x - x^2)(3x^2) =$

$= -5x^4 + 8x^3 + 2x - 2$ e) $(1/x) \cdot \ln(x) + \ln(x) \cdot (1/x) = (2/x) \cdot \ln(x)$

($\ln^2(x) = \ln(x) \cdot \ln(x)$) f) $\dfrac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - 4x - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

g) $$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) - \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

h) $$\frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \left(-\sin(x)\right) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(För varje x är $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, den s.k. trigonometriska ettan)

7. a) $6x/(1 + 3x^2)$ b) $e^{-x^2/2} \cdot (-2x/2) = -xe^{-x^2/2}$

c) $\dfrac{1}{2\sqrt{1 + \cos(x)}} \cdot (-\sin(x)) = -\dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{1 + \cos(x)}}$

d) $\dfrac{3}{2}(1 + x/2 + x^2/4)^{3/2-1} \cdot (1/2 + 2x/4) = \dfrac{3}{4}(1 + x)\sqrt{1 + x/2 + x^2/4}$

8. a) $1 \cdot \ln(1 + 3x^2) + x \cdot \dfrac{1}{1 + 3x^2} \cdot 6x = \dfrac{6x^2}{1 + 3x^2} + \ln(1 + 3x^2)$

b) $(-2 + 8x) \cdot e^{-x^2} + (1 - 2x + 4x^2) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (-2 + 6x + 4x^2 - 8x^3) \cdot e^{-x^2}$

$= 2(1 - x)(1 - 2x - 4x^2)e^{-x^2}$

c) $\dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x\right) = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \dfrac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

9. Max för $x = 1$, min för $x = 2$.

Derivatan har två nollställen $x = 1$ och $x = 2$. Andraderivatan är

$f''(x) = 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (x - 1) = 2x - 3$

För $x = 1$ får vi $f''(1) = -1 < 0$ och alltså maximum

För $x = 2$ får vi $f''(2) = 1 > 0$ och alltså minimum

Samma resultat kan erhållas genom studium teckenväxlingar av (första-)derivatan. kring de två x-värdena.

10. a) Vi får min $(= 1/2)$ för $x = 3/2$

$f'(x) = -6 + 4x$ med enda nollställe $x = 6/4 = 3/2$

$f''(x) = 4 > 0$ så $x = 3/2$ är en minpunkt

b) Vi får min $(= 1)$ för $x = 0$.

$f'(x) = x^3$ som är lika med 0 endast för $x = 0$

$f''(x) = 3x^2$ så $f''(0) = 0$, vilket inte duger för ”beslut” om max/min/varken eller

Kring $x = 0$ har $f'(x)$ teckenväxlingen $-\ 0\ +$, så det rör sig om en min-punkt.

b) Vi har max för $x=-2$ (maxvärde 52) och min för $x=3$ (minvärde -73)
$f'(x)=6x^2-6x-36$ så $f'(x)=0$ ger andragradsekvationen (efter division med 6)
$x^2-x-6=0$, med lösningarna $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+6}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$
så $x=3$ och $x=-2$ är nollställen till $f'(x)=0$
Vidare har vi $f''(x)=12x-6$ så $f''(3)=30>0$ och alltså ger $x=3$ ett lokalt min
och $f''(-2)=-30<0$ så $x=-2$ ger ett lokalt max
c) Maxvärde $(=2/5)$ för $x=4$
Vi får $f'(x)=\frac{1\cdot(1+x)^2-(x-3/2)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{(1+x)\big((1+x)-(x-3/2)\cdot 2\big)}{(1+x)^4}=$
$=\frac{1+x-2x+3}{(1+x)^3}=\frac{4-x}{(1+x)^3}$ så $f'(x)=0$ ger ekvationen $\frac{4-x}{(1+x)^3}=0$. Nämnaren multipliceras upp och bort (med 0) och kvar blir $4-x=0$, d.v.s $x=4$ är enda nollställe.
Det ser inte lockande ut att beräkna andraderivatan så vi prövar med teckenväxling.
Nämnaren $(1+x)^3$ i $f'(x)=\frac{4-x}{(1+x)^3}$ är positiv på bägge sidor kring $x=4$, medan täljaren, och alltså derivatan, har teckenväxlingen $+\ 0\ -$, varför det rör sig om en lokal maxpunkt.
OBS! Det är viktigt att dividera bort faktorn $(1+x)$, annars kan man luras tro att också $x=-1$ är ett nollställe. Man bör dock upptäcka att detta är fel eftersom nämnaren också blir lika med 0 för detta *x*-värde.
11. Funktionen har ett lokalt min i $(x,y)=(1,2)$
Ekvationerna $f_1'(x,y)=4x+3y-10=0$ och $f_2'(x,y)=3x+8y-19=0$ ger ett linjärt ekvationssystem med lösningen $(x,y)=(1,2)$.
Vi får andraderivatorna $f_{11}''(x,y)=4$ $\quad f_{12}''(x,y)=3$ $\quad f_{22}''(x,y)=8$, så
$D=4\cdot 8-3^2=23>0$. Eftersom $f_{11}''(1,2)=4>0$ rör det sig om ett minvärde.

12. Summasymbolen
1. a) 20 b) -7 c) 23 ($x_2+x_3-x_8$, resten tas ut) d) -1 ($x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}$)
2. a) 18 b) 60 c) 93 ($(3/4)(5+8+11+14+...+23+26)$) d) 40 (8 termer, alla med samma värde 5) e) 20

13. Geometriska serien
1. $1000\cdot\frac{1.04^{11}-1}{1.04-1}\approx 13486.35$
2. a) $3\cdot\frac{2^6-1}{2-1}=189$ b) $\frac{1-(2/3)^7}{1-(2/3)}\approx 2.8244$ c) $\frac{1}{1-(2/3)}=3$